14. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1974/1975

Aufgaben und Lösungen

14. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140731:

Fritz, Hans, Ulrich und Werner sind Schüler verschiedener Klassenstufen, und zwar der Klassen 5, 6, 7, 8. Sie gingen Pilze sammeln.

Folgendes ist bekannt:

(1) Der Schüler der Klasse 5 und außer ihm noch Ulrich fanden je 8 Steinpilze; der Schüler der Klasse 7 fand keinen einzigen Steinpilz.

(2) Fritz, Hans und außer ihnen der Schüler der 6. Klasse fanden viele Rotkappen.

(3) Drei Schüler, nämlich der Schüler der Klasse 8, der Schüler der Klasse 7 und Hans, lachten über den vierten Schüler, nämlich Werner, der einen Fliegenpilz mitgebracht hatte.

Wer von den vier Schülern ist Schüler der Klasse 5, wer der 6, wer der 7 und wer der 8?

Aufgabe 140732:

Beweise: Unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 3 teilbar ist!

Aufgabe 140733:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b - c = 3$ cm, $\alpha = 55°$ und $\beta = 85°$!

Dabei seien b bzw. c die Längen der Seiten AC bzw. AB, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 140734:

In einem VEB wurde eine bestimmte Art von Werkstücken zuerst in der Abteilung A_1 und danach in der Abteilung A_2 bearbeitet. Dabei konnte zunächst in der einen Abteilung täglich dieselbe Anzahl von Werkstücken bearbeitet werden wie in der anderen.

Mit Hilfe von Rationalisierungsmaßnahmen in beiden Abteilungen konnten die 53 Arbeiter der Abteilung A_1 ihre Produktion auf 159 % und die 62 Arbeiter der Abteilung A_2 ihre Produktion auf 124 % erhöhen. Da aber aus den angegebenen Gründen der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen gleich groß sein mußte, entschlossen sich hinreichend viele Arbeiter der einen Abteilung dazu, in der anderen Abteilung zu arbeiten.

Welche Anzahl von Arbeitern aus welcher der beiden Abteilungen nahm ihre Arbeit in der anderen Abteilung auf, wenn erreicht wurde, daß der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen danach wieder gleich groß war?

Auf wieviel Prozent der Produktionsmenge vor den Rationalisierungsmaßnahmen war damit insgesamt der Produktionsausstoß gestiegen?

Bemerkungen: Es sei angenommen, daß der Produktionsausstoß beider Abteilungen jeweils der Zahl der Arbeiter proportional ist.

Aufgabe 140735:

Der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b, c beträgt 34 cm. Weiterhin gilt $a : b = 3 : 8$ und $b : c = 4 : 3$.

Ermittle die Seitenlängen!

Aufgabe 140736:

Claudia erzählt ihrer Freundin Sabine, sie habe ein Dreieck ABC gezeichnet, in dem die Höhe auf BC genau durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$ geht. Sabine behauptet, allein aus diesen Angaben könne man, ohne die Zeichnung zu sehen, eindeutig die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ ermitteln.

Untersuche, ob Sabines Behauptung richtig ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Größe von $\sphericalangle ABC$!

14. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 140731:

Wegen (1) ist Ulrich nicht Schüler der Klasse 7, wegen (3) sind Hans und Werner nicht Schüler der Klasse 7. Also ist Fritz der Schüler der Klasse 7.

Von den restlichen Schülern gehören wegen (3) Hans und Werner nicht der Klasse 8 an. Also ist Ulrich Schüler der Klasse 8.

Von den nun noch verbleibenden zwei Schülern ist Hans wegen (2) nicht Schüler der Klasse 6. Also gehört Werner der Klasse 6 an, und folglich ist Hans der Schüler der Klasse 5.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 140732:

Für jede natürliche Zahl gilt:

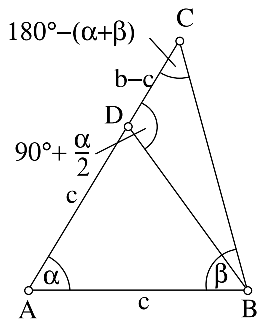
Bei ihrer Division durch 3 tritt als Rest einer der Werte 0, 1, 2 auf. Unter diesen Werten befinden sich keine vier verschiedenen. Daher gibt es unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen zwei, die bei Division durch 3 denselben Rest lassen. Ist r dieser Rest, so sind diese beiden Zahlen von der Form $3p + r$ und $3q + r$ mit natürlichen Zahlen p, q. Ihre Differenz ist demnach $(3p + r) - (3q + r) = 3(p - q)$ also durch 3 teilbar.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 140733:

(I) Angenommen, ΔABC sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Dann ist $b > c$. Daher gibt es einen Punkt D auf AC, für den $\overline{AD} = c$, also $\overline{DC} = b - c$ gilt.



Sodann ist nach dem Winkelsummensatz

$$\overline{\sphericalangle ACB} = 180° - (\alpha + \beta).$$

Ferner ist ΔABD gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{AD} = c$, also gilt $\overline{\sphericalangle ABD} = \overline{\sphericalangle ADB}$.

Wegen $\overline{\sphericalangle ABD} + \overline{\sphericalangle ADB} + \alpha = 180°$ folgt hieraus $\overline{\sphericalangle ABD} = \overline{\sphericalangle ADB} = \frac{1}{2}(180° - \alpha)$. Daher gilt $\overline{\sphericalangle CDB} = 180° - 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch D und zweitens auf dem freien Schenkel des in B an CB nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, angetragenen Winkels der Größe β.

Daraus folgt, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Man konstruiert ein Dreieck BDC, in dem die Seite DC die Länge $b-c$, der Winkel $\sphericalangle CDB$ die Größe $90° + \frac{\alpha}{2}$ und der Winkel $\sphericalangle DCB$ die Größe $180° - (\alpha + \beta)$ haben.

(2) Man zeichnet den Strahl aus C durch D.

(3) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, einen Winkel der Größe β an.

(4) Schneidet sein freier Schenkel den in (2) gezeichneten Strahl in einem Punkt außerhalb von CD, so sei dieser A genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion hat $\sphericalangle ABC$ die verlangte Größe β. Ferner hat $\sphericalangle BAC$ nach dem Winkelsummensatz und nach Konstruktion die Größe $180° - \overline{\sphericalangle ABC} - \overline{\sphericalangle DCB} = 180° - \beta - (180° - \alpha - \beta) = \alpha$.

Weiterhin ist nach Konstruktion $\overline{\sphericalangle ADB} = 180° - \overline{\sphericalangle CDB} = 180° - (90° + \frac{\alpha}{2}) = 90° - \frac{\alpha}{2}$ und somit $\overline{\sphericalangle ABD} = 180° - \overline{\sphericalangle BAD} - \overline{\sphericalangle ADB} = 180° - \alpha - (90° - \frac{\alpha}{2}) = 90° - \frac{\alpha}{2} = \overline{\sphericalangle ADB}$.

Also ist ΔABD gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{AD}$, und somit gilt auch, wie verlangt, $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{AD} = \overline{CD} = b - c$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da für die gegebenen Größen α, β die Beziehung $180° - \alpha - \beta > 0$ und $(90° + \frac{\alpha}{2}) + (180° - \alpha - \beta) < 180°$ gelten.

Danach sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar, und wegen $(180° - \alpha - \beta) + \beta < 180°$ und $90° + \frac{\alpha}{2} > \alpha$ auch Konstruktionsschritt (4).

Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 140734:

In A_1, produzierte nach Durchführung der Rationalisierung jeder der 53 Arbeiter $\frac{1{,}59}{53}$ und in A_2 jeder der 62 Arbeiter $\frac{1{,}64}{62}$ des Produktionsausstoßes seiner Abteilung vor den Rationalisierungsmaßnahmen.

Da in A_1 die Produktion auf eine größere Menge gewachsen war als in A_2 mußten Arbeiter von A_1 nach A_2 überwechseln. Ihre Anzahl sei x. Danach betrug in A_1 die Produktion $\frac{1{,}59}{53}(53-x)$ der früheren Produktion, in A_2 aber $\frac{1{,}24}{62}(62+x)$.

Da diese beiden Produktionsausstöße gleich waren, gilt

$$\begin{aligned} \frac{159}{53}(53-x) &= \frac{124}{62}(62-x) \\ 3(53-x) &= 2(62+x) \\ 159 - 3x &= 124 + 2x \\ 35 &= 5x \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Es wechselten somit 7 Arbeiter von A_1 nach A_2 über. Der neue Produktionsausstoß in jeder Abteilung betrug dann $\frac{1{,}59}{53} \cdot 46 \left(= \frac{1{,}24}{62} \cdot 69\right) = 1,38$, d.h., er stieg auf 138 % des früheren Produktionsausstoßes.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

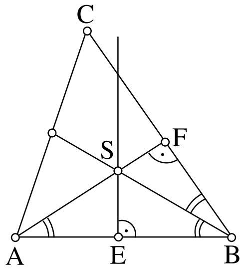
Lösung 140735:

Es gilt $a : b = 3 : 8$, $b : c = 8 : 6$ (Erweiterung von $4 : 3$ mit 2), daraus folgt $a : b : c = 3 : 8 : 6$, d.h., a, b und c sind der Reihe nach das 3-, 8-, bzw. 6fache ein und derselben Länge.

Wegen $3+8+6=17$ und wegen des gegebenen Umfange von 34 cm beträgt diese Länge 2 cm. Die gesuchten Seitenlängen betragen daher $a = 6$ cm, $b = 16$ cm, $c = 12$ cm.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 140736:



Sei S der genannte Schnittpunkt, E der Mittelpunkt der Seite AB und F Fußpunkt der Höhe auf BC.

Weil die Gerade durch B und S den Winkel $\sphericalangle ABC$ halbiert, gilt dann

$$\sphericalangle FBS \cong \sphericalangle SBA. \tag{1}$$

Da S außerdem auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, sind A, B, S die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks mit $\overline{AS} = \overline{BS}$, und deshalb ist

$$\sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SBA. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\sphericalangle FBS \cong \sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SBA. \tag{3}$$

Weiter sind A, B, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Summe der Größe der in (3) genannten untereinander gleich großen Winkel beträgt somit nach dem Winkelsummensatz 90°.

Jeder von ihnen hat daher die Größe 30°. Sabines Behauptung ist also richtig. Die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ beträgt 60°.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.