14. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1974/1975

Aufgaben und Lösungen

14. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140611:

2^6	2^2	2^7
e	b	2^4
d	c	a

In der abgebildeten Tabelle sind statt der Buchstaben a, b, c, d, e Zweierpotenzen so einzutragen, daß die aus den drei Zweierpotenzen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen gebildeten Produkte jeweils einander gleich sind.

Beweise, daß es genau eine Möglichkeit für eine derartige Eintragung gibt, und nenne diese Eintragung!

Aufgabe 140612:

Bernd und Monika unterhalten sich über die letzte Zusammenkunft ihrer Arbeitsgemeinschaft Junger Mathematiker, bei der genau 6 Jungen mehr anwesend waren als Mädchen. Bernd meint, daß bei dieser Veranstaltung von den 25 Zirkelteilnehmern genau 2 gefehlt hätten. Monika entgegnet nach einigem Überlegen, daß das nicht stimmen könne.

Wer von beiden hat recht?

Aufgabe 140613:

Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 12 km zurück. Ein zweiter Radfahrer, der denselben Weg von A nach B ebenfalls mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhr, startete am selben Tag um 7.00 Uhr in A und legte in jeder Stunde 15 km zurück. Er traf mit dem ersten Radfahrer zur gleichen Zeit in B ein.

a) Um wieviel Uhr holte der zweite Radfahrer den ersten ein?

b) Wie lang ist der Weg von A nach B?

Aufgabe 140614:

Jemand schreibt 3 * 6 * 5 und möchte dann die Sternchen * so durch Ziffern ersetzen, daß eine fünfstellige durch 75 teilbare Zahl entsteht.

Ermittle alle fünfstelligen, durch 75 teilbaren Zahlen, die unter diesen Bedingungen entstehen können!

14. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 140611:

Das Produkt aus Zweierpotenzen ist nach den Potenzgesetzen die Zweierpotenz der Summe der Exponenten. Die jeweilige Summe für Zeilen, Spalten und Diagonalen ist nach der ersten Zeile 15. Die Exponenten werden im folgenden bezeichnet mit a^* usw.:

Man berechnet jeweils eindeutig der Reihe nach

$$\begin{array}{lcccccl} a^* & = & 15-7-4 & = & 4 & \Rightarrow & a=2^4 \\ b^* & = & 15-6-a^* & = & 5 & \Rightarrow & b=2^5 \\ e^* & = & 15-4-b^* & = & 6 & \Rightarrow & e=2^6 \\ d^* & = & 15-6-e^* & = & 3 & \Rightarrow & d=2^3 \\ c^* & = & 15-2-b^* & = & 8 & \Rightarrow & c=2^8 \end{array}$$

Probe: Tabelle der Exponenten mit Summe in Zeilen, Spalten und Diagonalen:

	6	2	7	15
	6	5	4	15
	3	8	4	15
15	15	15	15	15

Aufgeschrieben und gelöst von Arndt Brünner

Lösung 140612:

Wenn bei 25 Zirkelteilnehmern genau 2 gefehlt haben, waren genau 23 Teilnehmer anwesend. Bei dieser Veranstaltung waren laut Bernd x Mädchen und $(x+6)$ Jungen da.

$$\begin{aligned} x+(x+6) &= 23 \\ 2x+6 &= 23 \\ 2x &= 17 \\ x &= 8.5 \end{aligned}$$

ist nicht ganzzahlig. Damit ist klar, daß Monika recht hat. Die von Bernd geschilderte Konstellation ist nicht möglich.

Hinweis: Es reicht zur Begründung auch aus anzugeben, daß bei einer geraden Anzahl Mädchen die Anzahl der Jungen ebenfalls geradzahlig ist und die Summe aus Mädchen und Jungen dann wieder geradzahlig wäre. Im ungeraden Fall der Mädchen wäre auch eine ungerade Anzahl Jungen dabei, die Summe zweier ungerader Zahlen ist wieder gerade. Da aber 23 eine ungerade Zahl ist, kann Bernds Aussage nicht stimmen.

Aufgeschrieben und gelöst von Thomas Kugel

Lösung 140613:

Die zurückgelegten Strecken s (in km) zum Zeitpunkt t (in Stunden des Tages) lassen sich für die Radfahrer durch die Funktionen

$s_1(t) = 12(t-6) = 12t - 72$ für den ersten und
$s_2(t) = 15(t-7) = 15t - 105$ für den zweiten Radfahrer

beschreiben. (Natürlich sind die Definitionsbereiche auf $t \geq 6$ bzw. $t \geq 7$ eingeschränkt.)

a) Beim Treffpunkt ist $s_1(t) = s_2(t)$, also $12t - 72 = 15t - 105$, woraus $t = 11$ folgt.
Der zweite Radfahrer holt den ersten um 11 Uhr ein.

b) $s_1(11) = 12 \cdot 11 - 72 = s_2(11) = 60$

Die Entfernung zwischen A und B beträgt 60 km.

Aufgeschrieben und gelöst von Arndt Brünner

Lösung 140614:

Multipliziert man 75 mit ganzen Zahlen, so entstehen als letzte beide Ziffern immer 00, 25, 50 oder 75 (also modulo 100 bzw. nach Division durch 100):

$$\begin{aligned} 0 \cdot 75 &= 0 \\ 1 \cdot 75 &= 75 \\ 2 \cdot 75 &= 150 \\ 3 \cdot 75 &= 225 \\ 4 \cdot 75 &= 300 \\ &\dots \end{aligned}$$

Da die letzte Ziffer 5 sein muß, ist in jedem Fall die vorletzte Ziffer 2 oder 7.

Die Primfaktorendarstellung von 75 sieht wie folgt aus: $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$. Damit die fünfstellige Zahl durch 3 teilbar wird, muß die Quersumme durch 3 teilbar sein. Diese lautet, wenn man a für die 2. und b für die 4. Stelle einsetzt:

Quersumme $q = 3 + a + 6 + b + 5 = 14 + a + b$ mit $b = 2$ oder $b = 7$. Damit ergibt sich $q = a + 16$ bzw. $q = a + 21$. Dadurch muß $a = 2, 5, 8$ für den Fall $b = 2$ sein bzw. $a = 0, 3, 6, 9$ für $b = 7$.

Die fünfstellige Zahl lautet mithin:

$$32625,\ 35625,\ 38625,\ 30675,\ 33675,\ 36675,\ 39675$$

Die Probe bestätigt jede dieser Lösungen.

Aufgeschrieben und gelöst von Arndt Brünner