12. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1972/1973

Aufgaben und Lösungen

12. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

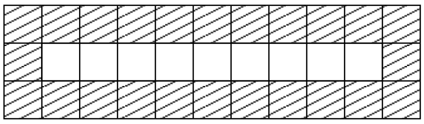
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120931:

Man beweise, daß für jede natürliche Zahl n die Zahl $n^6 - n^2$ durch 10 teilbar ist.

Aufgabe 120932:

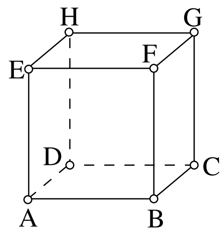
Karlheinz will aus gleich großen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, daß sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind (in der Abbildung gestrichelt gezeichnet), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein.



Geben Sie (durch Angabe der Anzahl der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte!

Aufgabe 120933:

Ein Würfel mit der Kantenlänge a und den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte A, B, G, H; D, C, F, E; A, D, G, F; B, C, H, E; A, E, G, C und B, H, F, D gehen.



Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfelkörper dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an.

Aufgabe 120934:

Zwei Fußgänger A und B legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:

A ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, den Rest mit 5 km/h. B ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, während der übrigen Zeit mit 5 km/h.

Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel?

Aufgabe 120935:

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, k sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlänge derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von k, auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}$.

Man beweise, daß dann $AC \perp BD$ gilt!

Aufgabe 120936:

a) Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel (k, n, m) natürlicher Zahlen k, n, m, für die $k \cdot n^2 \cdot (2m + 1) = 3\,808$ gilt.

b) Man gebe von den unter a) genannten Tripeln alle diejenigen an, für die das Produkt knm den kleinsten Wert annimmt.

12. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 120931:

Es gilt $n^6-n^2=n^2(n^4-1)=n^2(n^2-1)(n^2+1)=n^2(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Von den aufeinanderfolgenden Zahlen n und $n+1$ ist eine gerade, also ist n^6-n^2 durch 2 teilbar.

Wenn n bei Division durch 5 den Rest $0, 1$ oder 4 lässt, dann ist n bzw. $n-1$ bzw. $n+1$ durch 5 teilbar und das Produkt damit auch.

Lasse n nun bei Division durch 5 den Rest 2 oder 3, also $n=5k+2$ oder $n=5k+3$. Dann ist $n^2+1=25k^2+20k+5$ oder $n^2+1=25k^2+30k+10$ durch 5 teilbar. Also ist n^6-n^2 in jedem Fall durch 5 teilbar.

Da 2 und 5 teilerfremd sind ist damit n^6-n^2 auch durch 10 teilbar.

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa

Lösung 120932:

Sei $m>0$ die Anzahl der Quadratflächen, die in einer Zeile liegen und $n>0$ die, derer sich in einer Spalte befindlichen. O.B.d.A. können wir $m \geq n$ annehmen.

Weiterhin sei r die Anzahl der roten und w die Anzahl der weißen Quadratflächen. Wäre $n \leq 2$, bestände das Rechteck nur aus Randquadraten, sodass $r>0=w$ folgen und damit die Bedingung der Aufgabenstellung nicht erfüllen würde. Sei also ab jetzt $m \geq n \geq 3$.

Es folgt $r=2(m+n)-4$ und $w=(m-1)(n-1)$, zusammen mit $r=w$ also $2m+2n-4=mn-m-n+1$ bzw. $-5=mn-3m-3n=(m-3)(n-3)-9$, also $(m-3)(n-3)=4$. Da beide Faktoren nicht negativ sind und $m \geq n$ gilt, kann nur einer der beiden folgenden Fälle auftreten:

1.: $m-3=4$ und $n-3=1$, also $m=7$ und $n=4$, oder

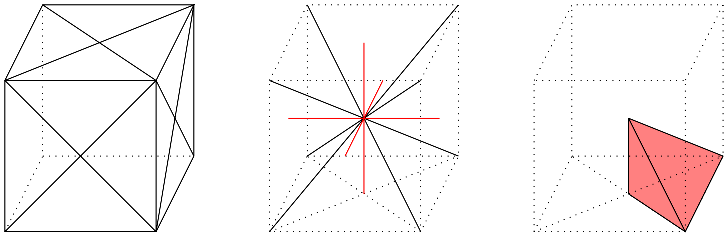
2.: $m-3=n-3=2$, also $m=n=5$.

In beiden Fällen bestätigt die Probe, dass dies wirklich Lösungen sind.

Karlheinz kann also ein 5×5-Quadrat, ein 7×4-Rechteck oder ein 4×7-Rechteck legen, was den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 120933:



Jede der Ebenen wird von zwei Raumdiagonalen des Würfels aufgespannt. Da es $\binom{4}{2} = 6$ ungeordnete Paare von Raumdiagonalen gibt, entsprechen diese genau den Ebenen. Der Mittelpunkt des Würfels ist gemeinsamer Schnitt aller Raumdiagonalen und liegt somit in alllen Ebenen. Eine Ebene schneidet die Oberfläche des Würfels in zwei diagonal gegenüberliegenden Kanten und den dazugehörigen Flächendiagonalen. Daher ergibt die linke Skizze den Schnitt aller Ebenen mit der Würfeloberfläche.

Falls zwei Ebenen eine gemeinsame Raumdiagonale haben, ist diese bereits die Schnittgerade. Falls zwei Ebenen keine gemeinsame Raumdiagonale haben, ist die Schnittgerade durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen gegeben (rote Strecken). Somit stellt die mittlere Skizze sämtliche Schnitte zwischen den Ebenen dar.

Die linke und mittlere Zeichnung ergeben daher alle möglichen Kanten, der gesuchten Teilkörper an. Daher ist ein Teilkörper eine Pyramide mit einer dreieckigen Grundfläche und dem Mittelpunkt der Würfels als Spitze. Insgesamt zerfällt der Würfel in $6 \cdot 4 = 24$ Teilkörper. Da eine Seitenfläche in 4 kongruente Teildreiecke unterteilt wird und alle Pyramiden dieselbe Höhe besitzen, haben diese alle das gleiche Volumen $V = \frac{a^3}{24}$.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 120934:

Wir nutzen die Beziehung Geschwindigkeit = Strecke/Zeit bzw. Zeit = Strecke/Geschwindigkeit.

d sei die Länge der gesamten Strecke.

A benötigt für die Strecke d die Zeit $t_A = \frac{d/2}{4} + \frac{d/2}{5} = \frac{9}{40}d$.

d_1, d_2 seien die Strecken, bei denen sich B mit $4\frac{km}{h}$ bzw. $5\frac{km}{h}$ bewegt. Dann ist $d_1 + d_2 = d$. Für die Strecken benötigt B die Zeiten $t_1 = \frac{d_1}{4}$ bzw. $t_2 = \frac{d_2}{5}$.
Nach Voraussetzung ist $t_1 = t_2$, also $\frac{d_1}{4} = \frac{d_2}{5}$. Zusammen mit $d_1 + d_2 = d$ folgt hieraus $d_1 = \frac{4}{9}d$, $d_2 = \frac{5}{9}d$ und somit $t_1 = t_2 = \frac{1}{9}d$. Also benötigt B die Gesamtzeit $t_B = t_1 + t_2 = \frac{2}{9}d$.

Da $\frac{9}{40} > \frac{2}{9}$, ist B zuerst am Ziel.

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 120935:

Da die Bogenlänge proportional zum entsprechenden Zentriwinkel ist, folgt aus der Bedingung auch $\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = \sphericalangle BMC + \sphericalangle DMA = 180°$, wobei M der Mittelpunkt von k sei und die vier Zentriwinkel den Vollwinkel bei M bilden.

Nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz sind die Peripheriewinkel über einem Bogen genau halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel, also

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle CAD = \frac{1}{2}(\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$$

Sei S der Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Dann gilt für das Dreieck ΔASD aufgrund der Innenwinkelsumme

$$\sphericalangle DSA = 180^\circ - \sphericalangle SAD - \sphericalangle ADS = 180^\circ - (\sphericalangle CAD + \sphericalangle ADB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Damit stehen die beiden Geraden AC und BD in s senkrecht aufeinander, $\square$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 120936:

a) Es gilt $3808 = 2^5 \cdot 7 \cdot 17$. Da $2m+1$ ein ungerader Teiler von 3808 sein muss kann dies nur $7, 17$ oder $119 = 7 \cdot 17$ sein. Damit gilt $m \in \{3, 8, 59\}$.

   Für n^2 gibt es die Möglichkeiten $n^2 = 4^2 = 2^4$ oder $n^2 = 2^2$ oder $n^2 = 1^2$ (unabhängig davon, wie m gewählt wurde). Jede dieser Wahlen legt k eindeutig fest, also gibt es $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten.

b) Wählt man $n = 1$ oder $n = 2$ so enthält k den zu 4 fehlenden Faktor quadratisch, um ein möglichst kleines Produkt zu erhalten muss also $n = 4$ gewählt werden. Von den verbleibenden Möglichkeiten $(k, m, n) \in \{(34, 4, 3), (14, 4, 8), (2, 4, 59)\}$ hat das Produkt $34 \cdot 4 \cdot 3 = 408$ den kleinsten Wert.

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa