12. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1972/1973

Aufgaben und Lösungen

12. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120921:
Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe der Kuben dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

Aufgabe 120922:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die der Quotient

$$\frac{8-3x}{7x-2} \quad \text{negativ ist!}$$

Aufgabe 120923:
Zu Dekorationszwecken sollen gleich große Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.

(2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.

(3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.

(4) Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.

(5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.

(6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.

Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig zu erfüllen!

Aufgabe 120924:
Ein konvexes Tangentenviereck $ABCD$ (ein Viereck, in das ein Kreis so einbeschrieben werden kann, daß er jede der vier Seiten des Vierecks in je einem Punkt berührt) habe den Umfang u, der Radius seines Inkreises sei r.

Berechnen Sie den Flächeninhalt F dieses Tangentenvierecks!

12. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 120921:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &= n^3 + (n+1) \cdot (n^2 + 2n + 1) + (n+2) \cdot (n^2 + 4n + 4) \\ &= n^3 + n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + n^3 + 4n^2 + 4n + 2n^2 + 8n + 8 \\ &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\ &= 3 \cdot (n^3 + 3n^2 + 5n + 3). \end{aligned}$$

Somit ist die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 3 teilbar.

Aufgeschrieben und gelöst von Conny42

2. Lösung:

Es ist

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3(n^3 + 2n)$$

durch 3 teilbar.

Bemerkung:

Wegen

$$n^3 + 2n = (n^3 - 4n) + 6n = n(n^2 - 4) + 6n = (n-2)n(n+2) + 6n$$

folgt sogar, dass die Summe von 3 Kuben immer durch $3^2 = 9$ teilbar sein muss, einer der drei Faktoren $n-2$, n oder $n+2$ durch 3 teilbar ist und damit auch $n^3 + 2$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 120922:

Es ist $\frac{8-3x}{7x-2} < 0$ genau dann, wenn einer der folgenden beiden Fälle eintritt: i) Es ist $8 - 3x < 0$ und $7x - 2 > 0$. ii) Es ist $7x - 2 < 0$ und $8 - 3x > 0$.

Zu i): Aus $8 - 3x < 0$ folgt $x > \frac{8}{3}$ und aus $7x - 2 > 0$ folgt $x > \frac{2}{7}$. Wegen $\frac{8}{3} > \frac{2}{7}$ ist $x > \frac{2}{7}$ automatisch erfüllt, wenn $x > \frac{8}{3}$ erfüllt ist. Der erste Fall tritt also genau dann ein, wenn $x \in \left(\frac{8}{3}, \infty\right)$.

Zu ii): Aus $7x - 2 < 0$ folgt $x < \frac{2}{7}$ und aus $8 - 3x > 0$ folgt $x < \frac{8}{3}$. Wegen $\frac{2}{7} < \frac{8}{3}$ ist $x < \frac{8}{3}$ automatisch erfüllt, wenn $x < \frac{2}{7}$ erfüllt ist. Der zweite Fall tritt also genau dann ein, wenn $x \in \left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$.

Insgesamt folgt, dass der Quotient $\frac{8-3x}{7x-2}$ genau dann negativ ist, wenn $x \in \left(-\infty, \frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right)$.

Aufgeschrieben und gelöst von Conny42

Lösung 120923:

Die kleinste Anzahl von Büchsen ist 36. Je 12 Büchsen der Sorten A, B und C können wie folgt zu einer Pyramide gestapelt werden:

A
B B
A A A
B B B B
C C C C C
B B B B B B
C C C C C C C
A A A A A A A A

Begründung, warum es mit weniger als 36 Büchsen nicht funktioniert:

Die Anzahl k der Büchsen muss eine Dreieckszahl, also von der Form $k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ sein. k muss den Teiler 3 enthalten.

Also kommen für $k < 36$ höchstens die Zahlen $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ und $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ infrage.

Die Summanden $1, 2, ..., n$ müssen dann auf drei Teilsummen aufgeteilt werden, die jeweils $\frac{k}{3}$ ergeben.

Bei $k = 3 = 1 + 2$ oder $k = 6 = 1 + 2 + 3$ ist solch eine Aufteilung nicht möglich, da der größte Summand (2 bzw. 3) bereits größer als $\frac{k}{3}$ ist, also in keine Teilsumme passt.

Bei $k = 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ können die Summanden nur auf eine Weise aufgeteilt werden, sodass sich jeweils die Teilsumme $\frac{k}{3} = 5$ ergibt: $1 + 4 = 2 + 3 = 5$. Diese Aufteilung widerspricht aber der Bedingung (6), da dann die zweite und die dritte Reihe dieselben Büchsensorten enthalten würden.

Bei $k = 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ können die Summanden ebenfalls nur auf eine Weise aufgeteilt werden, sodass sich jeweils die Teilsumme $\frac{k}{3} = 7$ ergibt: $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$. Und auch hier erhalten wir zwei benachbarte Zahlen in einer der Teilsummen, nämlich 3 und 4.

Mit $k = 36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ schließlich funktioniert es:

$\frac{k}{3} = 12 = 1 + 3 + 8 = 2 + 4 + 6 = 5 + 7$.

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 120924:

Sei M der Mittelpunkt und r der Radius des Inkreises. Dann zerfällt das Tangentenviereck in vier Teildreiecke ABM, BCM, CDM, ADM, so dass die Höhe der Dreiecke auf der äußeren Kante gerade der Inkreisradius ist. Daher gilt für den Flächeninhalt:

$$F = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} = \frac{ur}{2} \ .$$

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314