# 12. Mathematik Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 8
# Saison 1972/1973

Aufgaben und Lösungen

# 12. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 8
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120831:

Die FDJ-Gruppe der Klasse 8$a$ einer Oberschule führte einen Sportwettkampf durch. Vor Beginn des Wettkampfes sollte jeder Teilnehmer einen Tip darüber abgeben, welche drei Teilnehmer in welcher Reihenfolge das beste Gesamtergebnis erzielen würden.

Als man die Tipscheine auswerte, stellte sich heraus, daß ausschließlich Annekatrin, Bernd und Claudia auf den ersten drei Plätzen erwartet wurden. Dabei wurde die Reihenfolge Bernd - Annekatrin - Claudia genau fünfmal getippt. Außerdem wurden noch die Reihenfolge Bernd - Claudia - Annekatrin und Claudia - Annekatrin - Bernd erwartet, und zwar einer dieser beiden Tips genau vier- und der andere genau dreimal. Eine andere Reihenfolge wurde nicht getippt.

Für die Voraussagen wurden Punkte vergeben, und zwar für jeden richtig vorausgesagten Platz ein Punkt. Maximal waren also drei Punkte mit einem Tipschein erreichbar. Die Summe aller so vergebenen Punkte betrug 17. Bernd gewann, entgegen den meisten Voraussagen, nicht den Wettkampf, aber die ersten drei Plätze wurden tatsächlich von Annekatrin, Bernd und Claudia belegt.

Wer gewann den Wettbewerb? Wer belegte den zweiten und wer den dritten Platz? Wie oft wurde der Tip Bernd - Claudia - Annekatrin insgesamt abgegeben?

Aufgabe 120832:

Beweise den folgenden Satz:

Sind $a$, $b$, $c$ ($a \geq b \geq c$) drei beliebige natürliche Zahlen, dann ist die Summe dieser Zahlen oder eine der aus zweien dieser Zahlen gebildeten Differenzen durch 3 teilbar.

Aufgabe 120833:

Gegeben sei ein Dreieck $\Delta ABC$. Über der Seite $AB$ sei ein Parallelogramm $ABDE$ so errichtet, daß dessen Seite $DE$ mit auf derselben Seite der Geraden durch $A$ und $B$ liegt, daß dabei aber die Punkte $D$ und $A$ nicht auf derselben Seite der Geraden durch $B$ und $C$ liegen und daß außerdem die Punkte $E$ und $B$ nicht auf derselben Seite der Geraden durch $A$ und $C$ liegen. Ferner seien über den Seiten $BC$ und $AC$ je ein Parallelogramm $CBIH$ bzw. $ACKL$ derart errichtet, daß $D$ auf der Geraden durch $I$ und $H$ sowie $E$ auf der Geraden durch $K$ und $L$ liegt.

Beweise, daß dann der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ ist!

Aufgabe 120834:

Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M$. Ein Durchmesser dieses Kreises sei $AB$. Zwei Punkte $P_1$ und $P_2$ mögen sich vom gleichen Zeitpunkt an gleichförmig auf je einer der beiden Halbkreislinien von $A$ nach $B$ bewegen, wobei die Bewegung des Punktes $P_1$ viermal so schnell erfolgen soll wie die des Punktes

$P_2$.

Gibt es zwischen dem Start und der Ankunft von $P_1$ (in $B$) einen Zeitpunkt, zu dem die Dreiecke $\Delta ABP_1$ und $\Delta ABP_2$ gleichen Flächeninhalt haben?

Wenn ja, dann ermittle für jeden solchen Zeitpunkt die Größe des Winkels $\sphericalangle AMP_2$!

Aufgabe 120835:

Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{MP} = \overline{MR} = 9\,\text{cm}$ und einem Zentriwinkel $\sphericalangle PMR$ der Größe 50°.

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ so, daß $A$ auf $MP$ liegt, $B$ und $C$ auf dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$ liegen und $D$ auf $MR$ liegt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! (Eine Untersuchung, ob es genau ein derartiges Quadrat gibt, wird nicht verlangt.)

*Hinweis:* Es empfiehlt sich, zur Lösung Eigenschaften von zentrischen Streckungen zu benutzen.

Aufgabe 120836:

Untersuche, ob es eine kleinste positive rationale Zahl $a$ gibt, zu der man eine natürliche Zahl $x$ mit der Eigenschaft

$$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142$$

finden kann!

Wenn es ein solches kleinstes $a$ gibt, so ermittle, welchen Wert $x$ hierfür annimmt!

# 12. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 8
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 120831:

Im folgenden seien die Namen der auf den Tippzetteln vermerkten drei Wettkampfteilnehmer mit $A$, $B$, $C$ abgekürzt und die Platzverteilung durch die Reihenfolge dieser drei Buchstaben angegeben.

Da $A$, $B$ und $C$ die ersten drei Plätze belegten und $B$ nicht Erster wurde, kommen nur die folgenden Platzverteilungen in Frage: (1) $ABC$, (2) $ACB$, (3) $CAB$, (4) $CBA$.

Nun lässt sich in einer Tabelle angeben, wie viele Punkte in den Fällen (1) bis (4) bei jeder der laut Aufgabenstellung möglichen Tippverteilungen hätten vergeben werden können:

1. Möglichkeit der Tippverteilung

| Platzverteilung | $ABC$ | $ACB$ | $CAB$ | $CBA$ |
|---|---|---|---|---|
| Tipp $BAC$ 5mal | 0+0+5 | 0+0+0 | 0+5+0 | 0+0+0 |
| Tipp $BCA$ 4mal | 0+0+0 | 0+4+0 | 0+0+0 | 0+0+4 |
| Tipp $CAB$ 3mal | 0+0+0 | 0+0+3 | 3+3+3 | 3+0+0 |
| Summe | 5 | 7 | 14 | 7 |

2. Möglichkeit der Tippverteilung

| Platzverteilung | $ABC$ | $ACB$ | $CAB$ | $CBA$ |
|---|---|---|---|---|
| Tipp $BAC$ 5mal | 0+0+5 | 0+0+0 | 0+5+0 | 0+0+0 |
| Tipp $BCA$ 3mal | 0+0+0 | 0+3+0 | 0+0+0 | 0+0+3 |
| Tipp $CAB$ 4mal | 0+0+0 | 0+0+4 | 4+4+4 | 4+0+0 |
| Summe | 5 | 7 | 17 | 7 |

Wie die Tabelle zeigt, wird die Gesamtpunktzahl 17 genau dann erreicht, wenn Claudia den Wettbewerb gewann, Annekatrin den zweiten und Bernd den dritten Platz erreichte sowie der Tip $BCA$ genau 3mal abgegeben wurde.

*Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)*

Lösung 120832:

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

*Fall* 1 : Die bei der Division der Zahlen $a, b, c$ durch 3 auftretenden Reste sind paarweise verschieden. Es lasse o.B.d.A. die Zahl $a$ den Rest 0, die Zahl $b$ den Rest 1 und die Zahl $c$ den Rest 2. Dann lassen sich $a, b, c$ in folgender Form schreiben:

$$a = 3m; \qquad b = 3n + 1; \qquad c = 3s + 2$$

mit natürlichen Zahlen $m, n, s$. Nun gilt:

$$a + b + c = 3m + 3n + 1 + 3s + 2 = 3(m + n + s + 1)$$

d.h. $3 \mid (a + b + c)$.

*Fall* 2 : Es gibt unter den Zahlen $a, b, c$ mindestens zwei Zahlen, die bei Division durch 3 den gleichen Rest $r$ lassen. Das seien o.B.d.A. die Zahlen *aundb.*:

Dann lassen sich diese Zahlen in folgender Form schreiben:

$$a = 3m + r; \qquad b = 3n + r$$

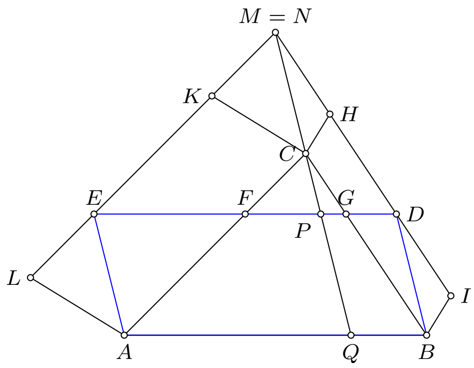
mit natürlichen Zahlen $m, n, r$, wobei $0 \leq r \leq 2$ gilt. Nun gilt:

$$a - b = 3m + r - (3n + r) = 3(m - n)$$

d.h. $3 \mid (a - b)$.

*Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)*

Lösung 120833:




Falls benötigt, werden die Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ wie folgt in flächeninhaltsgleiche Parallelogramme verwandelt:

Man zieht durch $C$ die Parallele zu den parallelen Parallelogrammseiten $BD$ und $EA$. Ihre Schnittpunkte mit $ED$ bzw. $AB$ seien $P$ bzw. $Q$ genannt. Die Gerade durch $K$ und $L$ schneide die genannte Parallele durch $C$ in einem Punkt $M$, die Gerade durch $I$ und $H$ schneide sie in einem Punkt $N$.

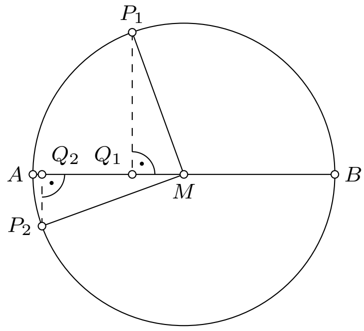
Dann sind $ACME$ und $CBDN$ ebenfalls Parallelogramme, und es gilt $EA = MC$ sowie $BD = NC$, woraus wegen $EA = BD$ folgt, dass $M = N$ ist.

Als Parallelogramme mit gleicher Grundseite und gleicher zugehöriger Höhe sind nun folgende Parallelogramme paarweise inhaltsgleich: einerseits $ACKL$, $ACME$ und $AQPE$, andererseits $BIHC$, $BDMC$ und $BDPQ$.

Da der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $AQPE$ und $BDPQ$ ist, ist er mithin auch gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $ACKL$ und $BIHC$, $\square$

*Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)*

Lösung 120834:




Für jede Lage des Punktes $P_1$, auf dem von ihm durchlaufenen Halbkreisbogen ist $P_2$ so gelegen, dass $\sphericalangle AMP_2 = \frac{1}{4}AMP_1 < \frac{1}{4} \cdot 180° = 45°$ gilt.

Umgekehrt nimmt die Größe des $\sphericalangle AMP_2$ während der beschriebene Bewegung alle Werte zwischen 0° und 45° an, jeden zu genau einem Zeitpunkt. Sind $Q_1$ bzw. $Q_2$ die Fußpunkte der von $P_1$ bzw. $P_2$ auf AB gefällten Lote, so haben die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ genau dann gleichen Flächeninhalt, wenn gilt:

$$P_1Q_1 = P_2Q_2 \tag{1}$$

Im Falle $\sphericalangle AMP_1 < 90°$ ist

$$\sphericalangle Q_2MP_2 = \sphericalangle AMP_2 = \frac{1}{4}\sphericalangle AMP_1 < \sphericalangle AMP_1 = \sphericalangle Q_1MP_1$$

und daher $P_2Q_2 < P_1Q_1$.

Im Fall $\sphericalangle AMP_1 = 90°$ ist $\sphericalangle Q_2MP_2 = \sphericalangle AMP_2 = \frac{1}{4}\sphericalangle AMP_1 < 90°$ und daher ebenfalls $P_2Q_2 < (MP_2 = MP_1 =)P_1Q_1$. Also kann (1) in den Fällen $\sphericalangle AMP_1 \leq 90°$ nicht erfüllt werden.

Im Fall $\sphericalangle AMP_1 > 90°$ ist die Bedingung (1) genau dann erfüllt, wenn

$$\sphericalangle BMP_1 = \sphericalangle Q_1MP_1 = \sphericalangle Q_2MP_2 = \sphericalangle AMP_2 \tag{2}$$

gilt; denn aus (1) folgt (2) vermittels des Kongruenzsatzes (ssw), aus (2) folgt (1) vermittels (sww). Nun ist (2) gleichwertig mit $180° - 4 \cdot \sphericalangle AMP_2 = AMP_2$ und dies mit $\sphericalangle AMP_2 = 36°$.

Daher gibt es genau einen Zeitpunkt mit der geforderten Eigenschaft, nämlich denjenigen, an dem der Winkel $\sphericalangle AMP_2$ die Größe 36° hat.

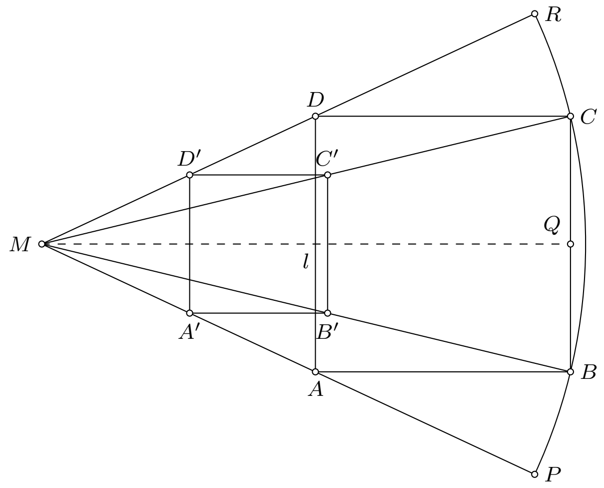
*Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)*

Lösung 120835:

(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Quadrat, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Ferner sei $A'$ ein Punkt auf $MP$. Es sei weiter $Q$ der Fußpunkt des Lotes $l$ von $M$ auf $BC$. Dann ist $\triangle MBQ \cong \triangle MCQ$ (ssw), also ist $l$ die Mittelsenkrechte von $BC$ und daher auch die von $AD$. Somit gilt $MA = MD$.

Die Parallele durch $A'$ zu $AB$ schneide den Strahl aus $M$ durch $R$ in einem Punkt, der $D'$ genannt sei. Die Parallelen durch $B'$ zu $BC$ und durch $D'$ zu $DC$ mögen sich im Punkt $C'$ schneiden.

Dann ist $A'B'C'D'$ ein Viereck, das aus $ABCD$ durch eine zentrische Strekkung mit dem Zentrum $M$ hervorgegangen ist, also ein Quadrat, für das wegen $MA = MD$ auch $MA' = MD'$ gilt.




Da das Quadrat $ABCD$ nicht auf derselben Seite von $AD$ liegt wie $M$, so liegt das Quadrat $A'B'C'D'$ nicht auf derselben Seite von $A'D'$ wie $M$.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man wählt auf $MP$ einen beliebigen Punkt $A'$.

(2) Man schlägt den Kreis um $M$ mit $MA'$. Schneidet er den Strahl aus $M$ durch $R$ in einem Punkt, so sei dieser $D'$ genannt.

(3) Man errichtet über $A'D'$ das Quadrat $A'B'C'D'$, das nicht auf derselben Seite von $A'D'$ liegt wie $M$.

(4) Man zeichnet die von $M$ ausgehenden Strahlen durch $B'$ bzw. $C'$. Schneiden sie den Bogen $PR$, so seien diese Schnittpunkte $B$ bzw. $C$ genannt.

(5) Man zeichnet die Parallele zu $B'A'$ durch $B$. Schneidet sie $PM$ in einem Punkt, so sei dieser $A$ genannt.

(6) Man zeichnet die Parallele zu $C'A'$ durch $C$. Schneidet sie $RM$ in einem Punkt, so sei dieser $D$ genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierbare Quadrat $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion ist die Mittelsenkrechte $l$ von $A'D'$ auch die von $B'C'$; wegen $MA' = MD'$ geht sie durch $M$, ist also auch Winkelhalbierende von $\angle B'MC'$.

Schneidet sie $BC$ in $Q$, so ist daher $\triangle MBQ \cong \triangle MCQ$ (sws), also $l$ auch senkrecht auf $BC$ und folglich $BC \parallel B'C'$. Hiernach und nach der weiteren Konstruktion ist $ABCD$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum $M$ aus $A'B'C'D'$ hervorgegangen.

Daher ist $ABCD$ ebenfalls ein Quadrat, und seine Punkte liegen so, wie es in der Aufgabe verlangt wurde.

*Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)*

Lösung 120836:

Angenommen, zu einer positiven rationalen Zahl $a$ gebe es eine natürliche Zahl $x$, für die gilt:

$$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142 \qquad (1)$$

Dann gilt auch

$$100x - 8a = 5x + 1136 \qquad \text{bzw.} \qquad 95x = 1136 + 8a, \qquad \text{also} \qquad x = \frac{1136 + 8a}{95} \tag{2}$$

Daher gibt es zu einer positiven rationalen Zahl $a$ nur dann eine natürliche Zahl $x$ mit der Eigenschaft (1), wenn $1136 + 8a$ durch 95 teilbar ist, wobei $8a > 0$ gilt.

Da 1136 bei Division durch 95 den Rest 91 lässt, erhält man die kleinste Zahl $a$ für $8a = 4$, sie lautet also $a = \frac{1}{2}$.

Für sie ergibt sich nach (2) $x = 12$, also eine natürliche Zahl. Umgekehrt erfüllt $x = 12$ zusammen mit $a = \frac{1}{2}$ auch (1), wie man durch Einsetzen bestätigt. Also gibt es ein kleinstes $a$ mit den geforderten Eigenschaften, und $x$ nimmt hierfür den Wert 12 an.

*Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)*

## Quellenverzeichnis

**(25)** Offizielle Lösung der Aufgabenkommission