



12. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Saison 1972/1973

Aufgaben und Lösungen





12. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 120821:

Axel, Bernd, Conrad, Dieter, Erwin, Frank und Gerd sind im Turnunterricht hintereinander der Größe nach angetreten, wobei der Größte von ihnen vorn steht. Es ist außerdem bekannt:

- (1) Dieter steht an vierter Stelle.
- (2) Gerd steht unmittelbar vor Bernd und unmittelbar hinter Erwin.
- (3) Axel steht unmittelbar hinter Frank.
- (4) Gerd und Axel sind Zwillinge, während der Zweitgrößte der sieben Jungen keine Geschwister hat.

Schreibe die Namen der sieben in der Reihenfolge auf, in der sie angetreten sind!

Aufgabe 120822:

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r , AB eine Sehne von k der Länge r und C ein von A und B verschiedener Punkt auf k .

Ermittle alle Möglichkeiten für die Größe des Winkels $\sphericalangle BCA$!

Aufgabe 120823:

Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl n sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als zweite Quersumme von n bezeichnet. Ist die zweite Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße ihre Quersumme die dritte Quersumme von n .

- a) Ermittle den größten Wert, der als dritte Quersumme einer 1972-stelligen Zahl auftreten kann!
- b) Gib (durch Beschreibung der Ziffernfolge) die kleinste 1972-stellige natürliche Zahl an, die diese größtmögliche dritte Quersumme hat!

Aufgabe 120824:

Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 7,5$ cm; $a = 6,5$ cm und $\alpha + \beta = 120^\circ$!

Dabei sei c die Länge der Seite AB , a diejenige der Seite BC , α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



12. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 120821:

Erwin kann nicht an erster Stelle stehen, weil sonst im Widerspruch zu (4) wegen (2) Gerd Zweitgrößter sein müsste.

Wegen (1) und (2) kann Erwin aber auch nicht an zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen. Da er wegen (2) auch nicht an sechster oder siebenter Stelle stehen kann, steht er an fünfter Stelle, und wegen (2) ist dann Gerd Sechster und Bernd Siebenter.

Die Plätze 1 bis 3 können somit nur Axel, Frank und Conrad eingenommen haben, und zwar wegen (3) Frank nur an erster oder zweiter Stelle. Würde Frank an erster Stelle stehen, so müßte Axel im Widerspruch zu (4) Zweitgrößter sein. Also steht Frank an zweiter, Axel an dritter und daher Conrad an erster Stelle.

Die Reihenfolge der sieben Jungen lautet mithin: Conrad, Frank, Axel, Dieter, Erwin, Gerd, Bernd.

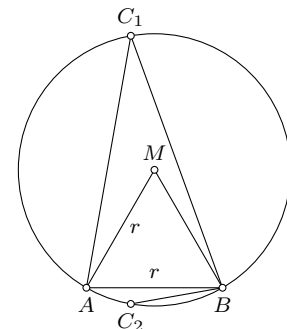
Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 120822:

Laut Aufgabe ist das Dreieck $\triangle ABM$ gleichseitig mit $AB = AM = r$. Wir unterscheiden nun bezüglich der Lage des Punktes C zwei Fälle:

Fall 1: Der Punkt C_1 liege auf dem größeren der beiden zu AB gehörenden Kreisbögen. Dann ist $\sphericalangle AC_1B$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$. Da dieser als Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABM$ eine Größe von 60° hat, hat $\triangle AC_1B$ eine Größe von 30° .

Fall 2: Der Punkt C_2 liege auf dem kleineren der beiden zu AB gehörenden Kreisbögen. Dann ist AC_2BC_1 ein Sehnenviereck. Nach einem bekannten Satz ergänzen sich im Sehnenviereck die Größen der gegenüberliegende Winkel zu 180° . Daher hat der Winkel $\sphericalangle AC_2B$ eine Größe von $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.



Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 120823:

- a) Unter allen 1972stelligen Zahlen hat diejenige die größte erste Quersumme, die aus 1972 Ziffern 9 besteht. Diese größte erste Quersumme beträgt somit $9 \cdot 1972 = 17748$.

Da hiernach die erste Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 17748 sein kann, erhält man die größte zweite Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 10 bis 17748 und



folglich als Quersumme der Zahl 9999, d.i. 36.

Da hiernach die zweite Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 36 sein kann, erhält man die größte dritte Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 1 bis 36 und folglich als Quersumme der Zahl 29, d.i. 11.

- b) Unter allen Zahlen von 10 bis 36 ist 29 die einzige mit der Quersumme 11. Unter allen Zahlen mit der Quersumme 29 findet man wegen $\frac{29}{9} = 3\frac{2}{9}$ die kleinste, indem man eine Zahl mit den letzten drei Ziffern 9 so bildet, dass die aus den vorangehenden Ziffern bestehende Zahl die kleinste mit der Quersumme 2 ist. Diese Zahl ist offenbar 2999.

Mit entsprechender Begründung findet man wegen $\frac{2999}{9} = 333\frac{2}{9}$ die kleinste 1972stellige Zahl A mit der Quersumme 2999, indem man eine Zahl mit den letzten 333 Ziffern 9 so bildet, dass die aus den vorangehenden $1972 - 333 = 1639$ Ziffern bestehende Zahl die kleinste 1639stellige mit der Quersumme 2 ist. So ergibt sich die Zahl

$$A = 1 \underbrace{0\dots 0}_{1637} 1 \underbrace{9\dots 9}_{1637}$$

die der Reihe nach aus einer Ziffer 1, 1637 Ziffern 0, einer Ziffer 1 und 333 Ziffern 9 besteht.

Ist nun g irgendeine von der kleinsten Zahl 2999 verschiedene, also größere Zahl mit der Quersumme 29 und hat eine 1972stellige Zahl n die Zahl g als Quersumme, so gilt:

Wegen $\frac{g}{9} \geq \frac{3000}{9} = 333\frac{3}{9}$ hat die kleinste 1972stellige Zahl B mit der Quersumme g als ihre letzten 333 Ziffern je eine 9 und unter den davor stehenden 1639 Ziffern mindestens eine Ziffer ≥ 2 . Folglich ist $B > A$ und demnach erst recht $n > A$.

Damit ist A als kleinste unter allen 1972stelligen Zahlen nachgewiesen, die irgendeine Zahl mit der Quersumme 29 als Quersumme haben, d.h. aber, die die dritte Quersumme 11 besitzen.

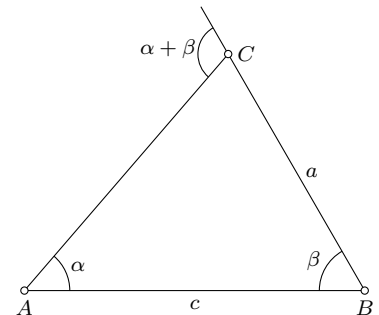
Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 120824:

- (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Dann ist durch die Außenwinkel bei C , deren jeder nach dem Außenwinkelsatz die Größe $\alpha + \beta$ hat, auch die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$ (als Nebenwinkel des Außenwinkels) bestimmt (es lässt sich auch der Winkelsummensatz benutzen). Seine Größe beträgt $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Die ihm gegenüberliegende Seite ist länger als die andere gegebene Seite.



- (II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Das Dreieck $\triangle ABC$ wird aus $\angle ACB = 60^\circ$, $BC = a = 6,5$ cm, $AB = c = 7,5$ cm als Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite (ssw) konstruiert.

- (III) Beweis, dass jedes nach (II) konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\alpha + \beta = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ$ und nach Konstruktion $AB = c = 7,5$ cm sowie $BC = a = 6,5$ cm.

- (IV) Die in (II) angegebene Konstruktion ist bekanntlich bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Stücke wegen $c > a$ das Dreieck $\triangle ABC$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)



Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission