12. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1972/1973

Aufgaben und Lösungen

12. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120811:

Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Quersumme der Zahl z beträgt 12

(2) Die aus der Zehner- und aus der Einerziffer (in dieser Reihenfolge) der Zahl z gebildete zweistellige Zahl ist das Fünffache der aus der Hunderterziffer von z bestehenden (einstelligen) Zahl.

Aufgabe 120812:

Von einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 9$ cm seien an jeder seiner Ecken jeweils ein Würfel mit einer Kantenlänge $b < \frac{a}{2}$ herausgeschnitten. (Die Flächen der herausgeschnittenen Würfel seien parallel zu den entsprechenden Flächen des großen Würfels).

a) Zeichne ein Schrägbild des Restkörpers für $b = 3$ cm! ($\alpha = 60°$, $1:3$)

b) Es gibt genau einen Wert von b, für den das Volumen V_R des Restkörpers 217 cm^3 beträgt. Ermittle diesen Wert!

Aufgabe 120813:

Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 000 fortlaufend nebeneinander geschrieben. Es entsteht die Zahl mit der Ziffernfolge 123456789101112...

welche Ziffer steht in dieser Zahl an der 300 001. Stelle?

Aufgabe 120814:

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ΔABC.

Konstruiere um jeden der Punkte A, B, C einen Kreis derart, daß die so entstandenen Kreise einander paarweise von außen berühren!

12. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 120811:

Die Hunderterziffer der gesuchten Zahl z kann nur eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sein.

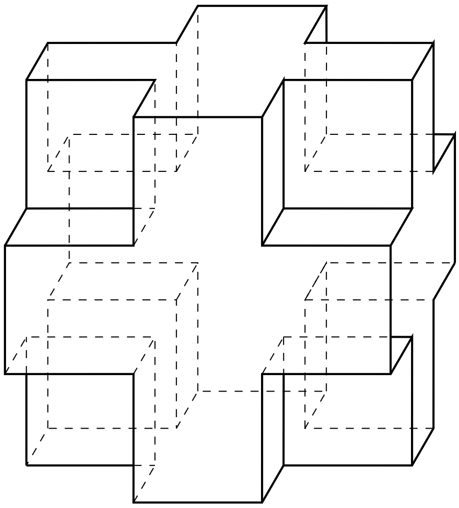
Ermittelt man nach (2) dazu jeweils die beiden anderen Ziffern, so erhält man genau die Zahlen 105, 210, 315, 420, 525, 630, 735, 840, 945.

Von ihnen haben genau die Zahlen 525 und 840 die Quersumme 12, erfüllen somit auch (1) und sind damit die sämtlichen Lösungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 120812:

a)



b) Das Volumen des großen Würfels sei mit V, das eines der herausgeschnittenen Würfel mit V_A bezeichnet. Dann gilt: $V_R = V_W - 8V_A$.

Also hat b genau dann den gesuchten Wert, wenn $217\text{ cm}^3 = 729\text{ cm}^3 - 8b^3$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $8b^3 = 512\text{ cm}^3 \to b = 4$ cm, und es gilt 4 cm $<$ 3 cm $= a$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 120813:

Es gibt

9 einstellige, $99 - 9 = 90$ zweistellige,

$999 - 99 = 900$ dreistellige,

$9\,999 - 999 = 9\,000$ vierstellige und

$99\,999 - 9\,999 = 90\,000$ fünfstellige Zahlen.

Die ersten neun Stellen der Ziffernfolge nehmen die einstelligen Zahlen, die nächsten 180 Stellen ($2 \cdot 90 = 180$) die zweistelligen, die nächsten 2 700 Stellen ($3 \cdot 900 = 2\,700$) die dreistelligen ein. 36 000 Stellen benötigen die vier- und 450 000 Stellen die fünfstelligen Zahlen.

Da die ein- bis vierstelligen Zahlen zusammen also 38 889 Stellen einnehmen, ist die uns interessierende Ziffer eine solche einer mindestens fünfstelligen Zahl.

Wegen $300\,001 - 38\,889 = 261\,112 < 450\,000$ und $26\,1112 : 5 = 52\,222$ Rest 2 ist die zu ermittelnde Ziffer die zweite Ziffer der 52223. fünfstelligen Zahl. Da die fünfstelligen Zahlen mit 10000 beginnen, ist es die zweite Ziffer der Zahl 62 222.

An der 300 001. Stelle steht mithin die Ziffer 2.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

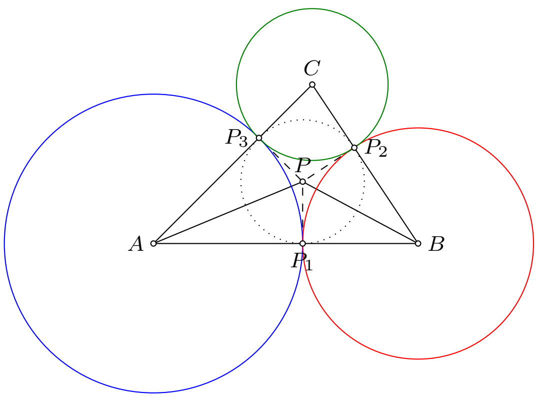
Lösung 120814:

(I) Angenommen, es gibt drei derartige Kreise. Ihre Berührungspunkte seien P_1, P_2, P_3 genannt. Da der Berührungspunkt je zweier Kreise stets auf der Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte liegt, liegen die drei genannten Punkte auf den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$. Die Bezeichnung sei nun so gewählt, dass P_1 auf AB, P_2 auf BC und P_3 auf AC liegt. Dann gilt:

$$(1) \quad P_1B = BP_2, \qquad (2) \quad P_2C = CP_3, \qquad (3) \quad P_3A = AP_1$$

Die Senkrechten auf AB bzw. BC im Punkte P_1 bzw. P_2 schneiden einander in einem Punkt, der mit P bezeichnet sei. Dann sind PP_1 und PP_2 Tangentenabschnitte auf den von einem Punkt an denselben Kreis gezogenen Tangenten, und es gilt: (4) $\quad PP_1 = PP_2$.

Analog erhält man $PP_1 = PP_3$. Folglich ist P der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.



(II) Daraus ergibt sich, dass drei Kreise nur dann die geforderte Eigenschaft haben, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

(1) Man konstruiert den Inkreismittelpunkt P des Dreiecks $\triangle ABC$.

(2) Man fällt von P auf die drei Seiten des Dreiecks die Lote. Ihre Endpunkte seien mit P_1, P_2, P_3 bezeichnet.

(3) Man schlägt um A den Kreis mit dem Radius AP_1, um B den Kreis mit dem Radius BP_1 und um C den Kreis mit dem Radius CP_2.

(III) Da jeder der Schlüsse in (I) umkehrbar ist, ergibt sich ein Beweis, dass die so konstruierten Kreise den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, aus der Umkehrung der Schlusskette in (I).

(IV) Der in (II) beschriebene Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Da somit stets genau ein Punkt P existiert, sind aus bekannten Gründen auch die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission