12. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1972/1973

Aufgaben und Lösungen

12. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120721:

Man ermittle die Paare (x, y) natürlicher Zahlen x und y, für die folgendes gilt:

(1) Die Summe der beiden Zahlen x und y beträgt 15 390.

(2) Setzt man die einstellige Zahl x vor die Zahl y, so erhält man eine Zahl z, die viermal so groß ist wie die Zahl u, die man erhält, indem man die Zahl x hinter die Zahl y setzt.

Aufgabe 120722:

Beweise den folgenden Satz:

Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$ die Mittelpunkte beider Diagonalen zusammenfallen, d.h. die Diagonalen einander halbieren, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 120723:

Über das Alter von vier Tennisspielern Arnold, Bruno, Christoph und Detlef ist folgendes bekannt:

(1) Alle vier Spieler sind zusammen 100 Jahre alt.

(2) Arnold und Bruno sind zusammen genau so alt wie Christoph und Detlef zusammen.

(3) Christoph ist älter als Detlef.

(4) Bildet man alle möglichen "Doppel" (Gruppen aus zwei Spielern), die sich aus den vier Spielern bilden lassen, dann besteht genau eines dieser "Doppel" aus zwei gleichaltrigen Spielern.

(5) Der älteste der vier Spieler ist vier Jahre älter als der jüngste.

Wie alt ist jeder der vier Spieler? (Sämtliche Angaben in vollen Lebensjahren)

Aufgabe 120724:

Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus $h_a = 6$ cm, $h_c = 5$ cm und $\beta = 50°$!

Dabei seien h_a die Länge der Dreieckshöhe, die auf BC senkrecht steht, h_c die Länge der auf AB senkrecht stehenden Dreieckshöhe und β die Größe des gegebenen Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

12. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 120721:

(I) Angenommen, zwei Zahlen x und y haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

(1) $x + y = 15\,390$,

(2) $z = 4u$.

Nach (1) und weil x einstellig ist, hat y als vorletzte Ziffer eine 8 und als letzte Ziffer nicht 0.

Wegen (2) ist z durch 4 teilbar. Nach den Teilbarkeitsregeln für die Zahl 4 stellen daher die letzten beiden Ziffern von z, das sind auch die von y, eine durch 4 teilbare Zahl dar. Somit endet y auf 84 oder 88. Daher kann nur $x = 6$ oder $x = 2$ sein.

Wäre $x = 2$, so wäre $y = 15\,388$, und man erhielte $z = 215\,388$ sowie $u = 153\,882$ im Widerspruch zu $4 \cdot 153\,882 = 615\,528 \neq 215\,388$. Daher können nur $x = 6$ und $y = 15\,384$ die geforderten Eigenschaften haben.

(II) In der Tat erfüllen diese beiden Zahlen (1), und man erhält mit ihnen ferner $z = 615\,384$ sowie $u = 153\,846$, so daß wegen $4 \cdot 153\,846 = 615\,384$ auch (2) erfüllt ist.

Somit gibt es genau die Möglichkeit $x = 6$, $y = 15\,384$, die Bedingungen (1) und (2) zu erfüllen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 120722:

In dem Viereck $ABCD$ sei E der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Diagonalen AC und BD. Dann gilt nach Voraussetzung: $\overline{AE} = \overline{EC}$ sowie $\overline{BE} = \overline{ED}$.

Nun gilt weiter: $\sphericalangle AEB \cong \sphericalangle DEC$ und $\sphericalangle AED \cong \sphericalangle BEC$ als Scheitelwinkel.

Daraus folgt: $\Delta AEB \cong \Delta DEC$ und $\Delta AED \cong \Delta BEC$ (je sws).

Folglich gilt: $\sphericalangle EAB \cong \sphericalangle ECD$ (1) sowie $\sphericalangle EAD \cong \sphericalangle ECB$ (2).

$$\left.\begin{array}{r}\text{Aus (1) folgt: } AB \parallel DC\\ \text{aus (2) folgt: } AD \parallel BC\end{array}\right\}\text{ Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.}$$

d.h., $ABCD$ ist ein Parallelogramm. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 120723:

Das in Jahren angegebene Alter der vier Spieler sei der Reihe nach mit a, b, c, d bezeichnet. Nun gilt laut Aufgabe:

(1) $a + b + c + d = 100$.

(2) $a + b = c + d$.

(3) $c > d$.

Aus (1) und (2) folgt (6) $a + b = c + d = 50$

Wäre nun $a = c$ oder $a = d$ oder $b = c$ oder $b = d$, so folgte daraus wegen (2) $b = d$ bzw. $b = c$ bzw. $a = d$ bzw. $a = c$ im Widerspruch zu (4). Hiernach und wegen (3) folgt aus (4) und (6), daß $a = b = 25$ sein muß.

Wegen (6) und (3) gilt ferner $c > 50 - c$, also $c > 25$, und daher $d = 50 - c < 25$.

Somit ist Christoph der älteste und Detlef der jüngste der vier Spieler. Wegen (5) gilt daher $c - d = 4$, woraus zusammen mit (6) dann $c = 27$ und $d = 23$ folgt.

Also ist Christoph 27 Jahre alt, Arnold und Bruno sind je 25 Jahre alt, und Detlef ist 23 Jahre alt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 120724:

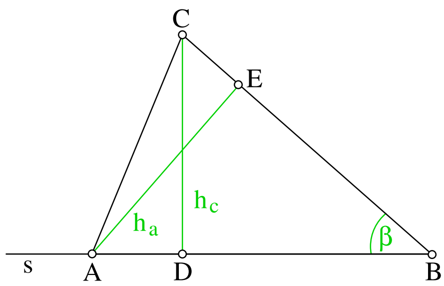
(I) Angenommen, ΔABC sei ein Dreieck, wie es nach der Aufgabenstellung konstruiert werden soll.

Der Fußpunkt der von C auf die Gerade durch A und B gefällten Höhe sei D.

Dann gilt für das Dreieck ΔBCD wegen $\beta < 90°$: $\overline{\sphericalangle DBC} = \beta$, $\overline{\sphericalangle BDC} = 90°$ und $\overline{CD} = h_c$.

Punkt A liegt

1. auf dem Strahl s aus B durch D und
2. auf einer Parallelen zu BC im Abstand h_a, und zwar auf derselben Seite von BC wie D, weil A auf dem Strahl s liegt.



(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Dreieck ΔBCD aus den Winkeln $\sphericalangle DBC$, $\sphericalangle BDC$ und der Seite CD, deren Größen β, 90° bzw. h_c sind.

(2) Wir zeichnen den Strahl s aus B durch D.

(3) Wir ziehen im Abstand h_a die Parallele zu BC, die auf der gleichen Seite von BC liegt wie D. Schneidet sie den Strahl s, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.

(III) Beweis, daß jedes auf diese Weise konstruierte Dreieck ΔABC tatsächlich allen Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion hat der Winkel $\sphericalangle ABC$ dieselbe Größe wie der Winkel $\sphericalangle DBC$, und dieser hat die Größe β, ferner ist $\overline{CD} = h_c$, und die Strecke CD steht senkrecht auf AB. Schließlich hat nach Konstruktion der Punkt A von BC den Abstand h_a.

(IV) Wegen $\beta < 90°$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium (sww) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ferner sind nach Ausführung von (1) die Schritte (2) und (3) eindeutig ausführbar, und da BC nicht parallel BD ist, existiert dann auch eindeutig der Schnittpunkt A, wobei man bei verschiedenen Ausführungen von (1) zu kongruenten Dreiecken ΔABC gelangt.

Das Dreieck ΔABC ist mithin durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.