11. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1971/1972

Aufgaben und Lösungen

11. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110921:

Bei einem geraden Kreiszylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm^2) und seines Volumens (in cm^3) untereinander gleich sein.

Ermitteln Sie den Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders!

Aufgabe 110922:

Ermitteln Sie alle geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen a und b $(b \neq 0)$ mit folgender Eigenschaft:

Ersetzt man den Zähler a des Bruches $\frac{a}{b}$ durch die Summe aus a und einer geeigneten natürlichen Zahl n $(n \neq 0)$ und ersetzt man zugleich den Nenner b dieses Bruches durch das Produkt aus b und der gleichen Zahl n, so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist.

Aufgabe 110923:

Eine Kreislinie sei in 30 gleich große Bögen geteilt. Die Teilpunkte seien der Reihe nach mit P_1 bis P_{30} bezeichnet.

Berechnen Sie die Größe jedes der vier Winkel, unter denen sich die Strecken P_7P_{18} und $P_{12}P_{21}$ schneiden!

Aufgabe 110924:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Sind p_1 und p_2 Primzahlen, für die $3 < p_1 < p_2$ gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen a und b, so daß die Gleichungen

(1) $a + b = p_2$ und

(2) $a - b = p_1$

gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt $a \cdot b$ durch 6 teilbar ist.

11. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 110921:

Die Formeln für den Umfang u, die Mantelfläche A_M und das Volumen V eines geraden Kreiszylinders lauten:

$$u = 2\pi r \tag{1}$$
$$A_M = 2\pi rh \tag{2}$$
$$V = \pi r^2 h \tag{3}$$

Setzt man nun (2) und (1) gleich, ergibt sich (einheitenlos): $2\pi rh = 2\pi r$ und damit nach Division durch $2\pi r$, was möglich ist, da ein entarteter Kreiszylinder mit $r = 0$ nicht betrachtet wird: $h = 1$

Nach Gleichsetzen von (3) und (2) ergibt sich (einheitenlos): $\pi r^2 h = 2\pi rh$ und damit nach Division durch $2\pi rh$, was ebenfalls zugelassen sei, da auch $h = 0$ zu einem entarteten Kreiszylinder führen würde: $r = 2$

Die Probe bestätigt die einzige Lösung des geraden Kreiszylinders mit

dem Radius $r = 2\,\text{cm}$ sowie $h = 1\,\text{cm}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Thomas Kugel

Lösung 110922:

Gesucht sind Zahlentripel (a, b, n), die die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{a+n}{bn}$$

erfüllen. b kann gekürzt werden und ist somit beliebig wählbar.

Nach Umformung erhalten wir $(a-1)(n-1) = 1$.

Da Lösungen in $\mathbb{Z}$ gesucht sind, folgt daraus $a - 1 = n - 1 = \pm 1$. Also sind wegen $n \neq 0$ die Tripel durch $(2, b, 2), b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ gegeben.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 110923:

Wir ergänzen das 30-Eck zu einem 60-Eck mit Ecken $Q_1, \dots, Q_{60}$. Sei M der Mittelpunkt.

Dann ist $P_7P_{18} = Q_{14}Q_{36}$ orthogonal zu $MQ_{25},\ 25 = \frac{1}{2}(14 + 36)$ und $P_{12}P_{21} = Q_{24}Q_{42}$ orthogonal zu $MQ_{33},\ 33 = \frac{1}{2}(24 + 42)$.

Der Schnittwinkel der Geraden entspricht daher dem Winkel

$$\sphericalangle Q_{25}MQ_{33} = \frac{360^\circ}{60}(33 - 25) = 48^\circ.$$

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 110924:
Addition von (1) und (2) ergibt $2a = p_1 + p_2$, Subtraktion ergibt $2b = p_2 - p_1$.

Setze also $a = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ und $b = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)$.

Weil p_1, p_2 Primzahlen größer als 2 mit $p_2 > p_1$ sind, gilt $a, b \in \mathbb{N}$.

Außerdem ist $ab = \frac{1}{4}(p_1 + p_2)(p_2 - p_1)$. Da p_i Primzahlen mit $p_i > 3$ sind, sind die p_i nicht durch 2 teilbar. Dann ist aber entweder $p_1 + p_2$ oder $p_2 - p_1$ durch 3 teilbar. Außerdem ist einer der Faktoren $(p_2 \pm p_1)$ durch 4 und einer durch 2 teilbar.
Damit ist $(p_1 + p_2)(p_2 - p_1)$ durch 24 teilbar, also ab durch $24/4 = 6$.

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa