11. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Saison 1971/1972

Aufgaben und Lösungen

11. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110821:
Beweise den folgenden Satz:

Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist genau eine der Zahlen $p-1$, $p+1$ durch 6 teilbar.

Aufgabe 110822:
Es sei AB eine Strecke gegebener Länge a, auf der zwei Punkte C und D liegen. Dabei liege C zwischen A und D und D zwischen C und B. Über AC, AD und DB seien auf derselben Seite der Geraden durch A und B Halbkreise geschlagen, und über CB sei ein Halbkreis auf der anderen Seite der Geraden geschlagen.

Es ist die Summe s der Längen aller dieser Halbkreisbögen in Abhängigkeit von a zu ermitteln.

Aufgabe 110823:
Beweise, daß für jedes Dreieck ΔABC der folgende Satz gilt:

Ist S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit dem Umkreis des Dreiecks ΔABC, dann liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

Aufgabe 110824:
In einer Ebene ϵ seien zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q sowie eine durch Q gehende Gerade g beliebig gegeben.

a) Beweise, daß dann stets der Spiegelpunkt P' von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt!

b) Beweise, daß es umgekehrt zu jedem Punkt P' des Kreises um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ eine durch Q verlaufende Gerade g gibt, bezüglich der P' der Spiegelpunkt von P ist!

c) Beweise: Ist P^* ein Punkt, der nicht auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt, so gibt es keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre!

11. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 110821:

Vorüberlegungen:

Definition Primzahl: Eine Primzahl ist eine Zahl, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.

Teilbarkeitssatz: Wenn eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist sie auch durch 6 teilbar.

Man muss also beweisen, dass entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 2 und durch 3 teilbar ist, um zu beweisen, dass entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 6 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 2:

p ist eine Primzahl und größer als 3, darf demnach nicht durch 2 teilbar sein, da eine Primzahl nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Da jedoch jede zweite Zahl durch 2 teilbar ist, müssen die Nachbarzahlen von p ($p-1$ und $p+1$) beide durch 2 teilbar sein.

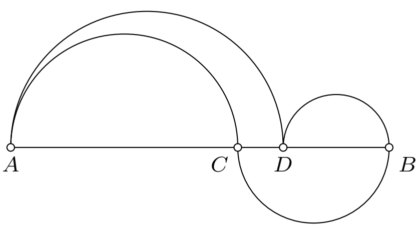
Teilbarkeit durch 3:

p kann nach der Definition von Primzahlen (s. oben) nicht durch 3 teilbar sein, da p eine Primzahl ist. Geht man davon aus, dass $p-1$ auch nicht durch 3 teilbar ist, muss $p+1$ aber durch 3 teilbar sein, da jede dritte Zahl durch 3 teilbar ist. Dies gilt auch für $p-1$, wenn $p+1$ nicht durch 3 teilbar ist. Es ist also entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar.

$\Rightarrow$ Da $p-1$ und $p+1$ durch 2 und entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar sind, ist entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 6 teilbar.

Aufgeschrieben und gelöst von Tobias Hemmert

Lösung 110822:



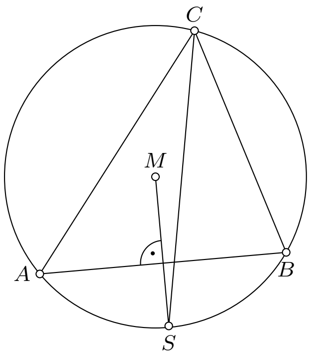
Die Länge des Halbkreisbogens über AC beträgt $AC \cdot \frac{\pi}{2}$. Die Länge des Halbkreisbogens über AD beträgt $AD \cdot \frac{\pi}{2}$. Die Länge des Halbkreisbogens über DB beträgt $DB \cdot \frac{\pi}{2}$ und die Länge des Halbkreisbogens über CB beträgt $CB \cdot \frac{\pi}{2}$.

Daher beträgt die gesuchte Summe

$$s = (AC + AD + DB + CB) \cdot \frac{\pi}{2} = 2 \cdot AB \cdot \frac{\pi}{2} = a \cdot \pi$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 110823:



Der Mittelpunkt des Umkreises sei M. Nach dem Satz über Zentriwinkel und Peripheriewinkel folgt:

$\sphericalangle AMS \cong \sphericalangle SMB$ und, da M Mittelpunkt des Umkreises ist, $AM = SM = BM$.

Daher gilt: $\triangle AMS \cong \triangle SMB$ (sws), woraus $AS = SB$ folgt. Infolgedessen liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 110824:

a) Liegt P auf g, so auch P', und es gilt $QP = QP'$ (1).

   Liegt P nicht auf g, so ist $P' \neq P$, und die Gerade durch P und P' steht senkrecht auf g. Ist S ihr Schnittpunkt mit g, so gilt ferner $SP = SP'$. Wenn nun $S = Q$ ist, so ist damit (1) gezeigt.

   Wenn aber $S \neq Q$ ist, so erhält man $\triangle QSP = \triangle QSP'$ (sws) und hieraus ebenfalls (1). Mit (1) ist bereits die Behauptung bewiesen.

b) Ist $P' = P$, so hat die Gerade g durch P, Q die behauptete Eigenschaft.

   Ist $P' \neq P$ ein Punkt des Kreises um Q mit PQ, so gilt (1), und daher geht die Mittelsenkrechte g von PP' durch Q. Da P' der Spiegelpunkt von P bezüglich g ist, ist somit die Behauptung bewiesen.

c) Gäbe es entgegen der Behauptung doch eine Gerade g mit den genannten Eigenschaften, so läge nach a) der Spiegelpunkt P^* von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit PQ. Das steht im Widerspruch zur Behauptung.

   Es gibt für die genannten Punkte P^* mithin keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission