11. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1971/1972

Aufgaben und Lösungen

11. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110721:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind!

Aufgabe 110722:
Andreas, Birgit und Claudia trugen untereinander ein kleines Schachturnier aus. Folgendes ist hierüber bekannt:

(1) Jeder spielte gegen jeden die gleiche Anzahl von Partien.

(2) Keine Partie endete unentschieden (remis).

(3) Andreas gewann genau $\frac{2}{3}$ seiner Spiele.

(4) Birgit gewann genau $\frac{3}{4}$ ihrer Spiele.

(5) Claudia gewann genau ein Spiel.

Ermittle die Anzahl aller Spiele, die in dem Turnier insgesamt ausgetragen wurden!

Aufgabe 110723:
Beweise folgenden Satz:

In jedem spitzwinkligen Dreieck ΔABC hat jeweils einer der Schnittwinkel je zweier Höhen die gleiche Größe wie der Innenwinkel an derjenigen Ecke, von der keine der beiden Höhen ausgeht!

Aufgabe 110724:
Konstruiere ein konvexes Viereck $ABCD$ aus $\overline{BC} = 3,5$ cm; $\overline{CD} = 3,5$ cm; $\overline{AC} = 5$ cm; $\sphericalangle DAB = 75°$ und $\sphericalangle ABC = 120°$!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein konvexes Viereck eindeutig bestimmt ist!

11. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 110721:

Eine Zahl ist genau dann gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar, wenn sie das kgV dieser Zahlen ist oder ein Vielfaches davon.

Wegen

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
2 & = & 2 & & & & & & & & & & & & \\
3 & = & & & & & & & 3 & & & & & & \\
4 & = & 2 & \cdot & 2 & & & & & & & & & & \\
6 & = & 2 & \cdot & & & & & 3 & & & & & & \\
7 & = & & & & & & & & & & & 7 & & \\
8 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & & & & & & & & \\
9 & = & & & & & & & 3 & \cdot & 3 & & & & \\
12 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & & & 3 & & & & & & \\
14 & = & 2 & \cdot & & & & & & & & & 7 & & \\
\hline
\text{ist das kgV} & & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 3 & \cdot & 7 & = & 504.
\end{array}$$

Die einzige dreistellige natürliche Zahl, die durch 504 teilbar ist, ist 504. Daher ist 504 die einzige Zahl, die allen Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 110722:

(6) Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, aus den drei Spielern ein Paar von gegeneinander Spielenden auszuwählen, so ist nach (1) die Anzahl aller Spiele das Dreifache derjenigen Partiezahl, die jeweils ein solches Paar gegeneinander austrug.

(7) Das Doppelte dieser Partienzahl und somit $\frac{2}{3}$ aller Spiele des Turniers beträgt daher die Anzahl derjenigen Spiele, an denen jeweils einer der Spieler überhaupt teilnahm, d.h., jeder der 3 Spieler nahm an genau $\frac{2}{3}$ aller Spiele teil.

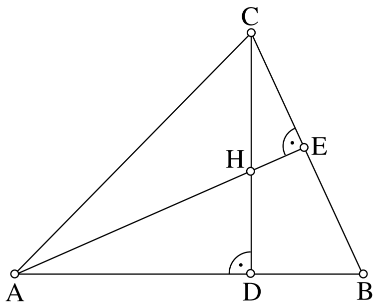
Wegen (3) und (7) gewann infolgedessen Andreas genau $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ aller Spiele und wegen (4) und (7) Birgit genau $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ aller Spiele.

Somit gewannen Andreas und Birgit zusammen wegen $\frac{4}{9} + \frac{1}{2} = \frac{17}{18}$ genau $\frac{17}{18}$ aller Spiele. Daher und weil wegen (2) jedes Spiel von genau einem Spieler gewonnen sein mußte, gewann Claudia genau $\frac{1}{18}$ aller Spiele. Da dies andererseits nach (5) genau ein Spiel war, wurden folglich genau 18 Spiele bei diesem Turnier ausgetragen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 110723:

Weil ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck ist, liegt der Höhenschnittpunkt im Innern des Dreiecks. Er sei mit H bezeichnet.



Es seien ferner zwei Höhen des Dreiecks ausgewählt; die Bezeichnung läßt sich dann so wählen, daß dies die von C bzw. A ausgehenden Höhen sind. Ihre Fußpunkte auf AB bzw. BC seien D bzw. E genannt.

Dann gilt: $\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle AEB$ als rechte Winkel und $\sphericalangle HAD \cong \sphericalangle EAD$ (H liegt auf AE).

Folglich gilt wegen des Winkelsummensatzes (in ΔADH bzw. ΔBEA)

$$\sphericalangle AHD \cong \sphericalangle ABE \quad \square$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 110724:

(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann ist das Dreieck ΔABC aus den Seiten AC, BC und dem der größeren Seite AC gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle ABC$ zu konstruieren.

Punkt D muß nun erstens auf dem freien Schenkel eines Winkels der Größe $\overline{\sphericalangle BAD}$ und zweitens auf dem Kreis um C mit dem Radius $\overline{CD}$ liegen.

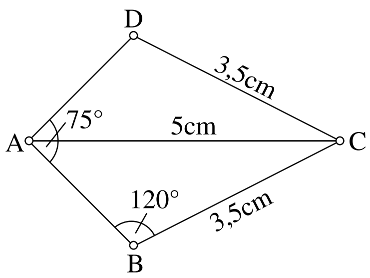
Ferner liegen, da das Viereck konvex ist, B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und C.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck ΔABC aus $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 3,5$ cm und $\overline{\sphericalangle ABC} = 120°$.

(2) Man trägt in A an AB einen Winkel der Größe 75° so an, daß sein freier Schenkel nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

(3) Man schlägt den Kreis um C mit $\overline{CD} = 3,5$ cm. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei einer der Schnittpunkte D genannt.

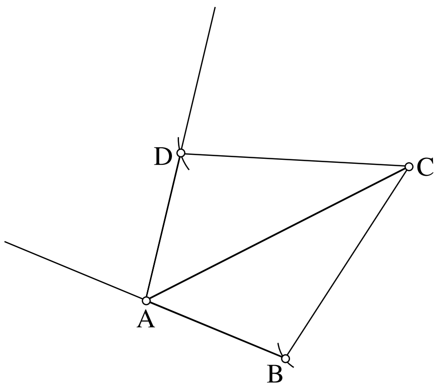


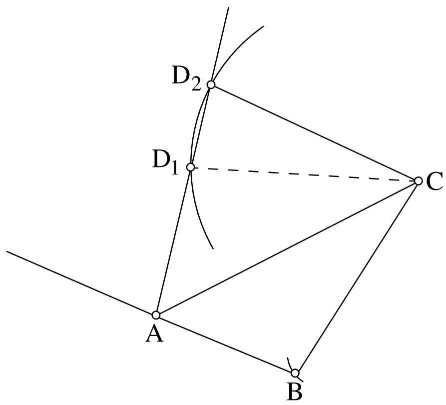
(III) Der Beweis, daß bei je 4 so konstruierten Punkten A, B, C, D die vorgeschriebenen Streckenlängen und Winkelgrößen auftreten, ergibt sich unmittelbar aus (II) und der Umkehrung der Schlüsse in (I). Ferner folgt aus (II), daß $\overline{\sphericalangle DAB} + \overline{\sphericalangle ABC} = 195° > 180°$ ist, so daß keiner der Winkel $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ die Größe 180° erreichen oder überschreiten kann. Daher bilden A, B, C, D die Ecken eines konvexen Vierecks.

(IV) Die Konstruktion des Dreiecks ΔABC ist wegen $\overline{AC} > \overline{BC}$ und, weil $\sphericalangle ABC$ der Seite AC gegenüberliegt, nach dem Kriterium (ssw) stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.

Der Kreis um C mit $\overline{CD}$ schneidet den freien Schenkel des nach (2) konstruierten Winkels von 75° bei den vorgegebenen Werten in genau zwei Punkten D_1 und D_2. Man erhält also (bis auf Kongruenz) zwei Vierecke $ABCD_1$ und $ABCD_2$, die beide den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Die beiden Vierecke sind nicht kongruent, da sie (wie aus der Figur ersichtlich ist) verschiedenen Flächeninhalt haben.





Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.