



**11. Mathematik Olympiade**  
**2. Stufe (Kreisolympiade)**  
**Klasse 5**  
**Saison 1971/1972**

Aufgaben und Lösungen

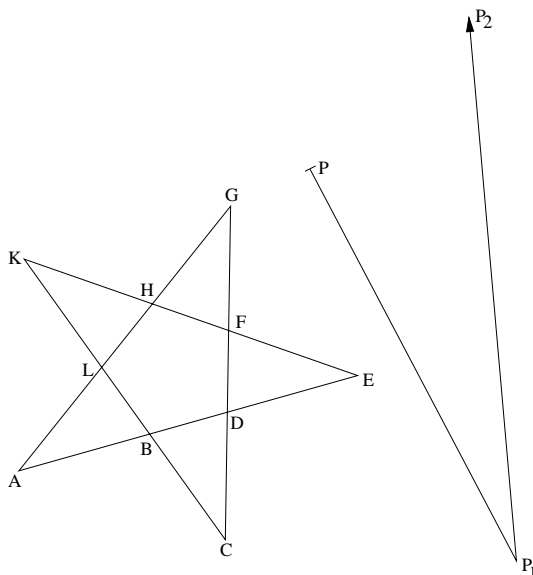




11. Mathematik-Olympiade  
2. Stufe (Kreisolympiade)  
Klasse 5  
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 110521:



Auf der Abbildung sind eine Sternfigur  $ABCDEFGHKL$  und zwei Verschiebungspfeile  $\overrightarrow{PP_1}$  und  $\overrightarrow{P_1P_2}$  abgebildet. Auf die Sternfigur sollen nacheinander die Verschiebungen  $\overrightarrow{PP_1}$  und  $\overrightarrow{P_1P_2}$  angewendet werden.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck die dabei entstehende Sternfigur  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2K_2L_2$ !

Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

Aufgabe 110522:

Bernd hat an Monika insgesamt 21 Mark an Beiträgen abzurechnen. Er hat 8 Zweimarkstücke und 6 Fünfmückstücke und kein weiteres Geld bei sich. In Monikas Kasse befinden sich genau 20, – Mark, und zwar in Form von 10 Zweimarkstücken. Sie behauptet, daß es unter diesen Umständen 3 verschiedene Möglichkeiten gibt, den angegebenen Betrag abzurechnen.

Dabei sollen keine Möglichkeiten gezählt werden, bei denen ein Geldstück einmal zwischen Bernd und Monika hin- und ein gleichwertiges später wieder zurückgegeben wird. Auch sollen Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, in der Geldstücke gegeben werden, nicht als verschieden gelten. Ebenso soll es nicht darauf ankommen, welches Fünfmück- oder welches Zweimarkstück gegeben wird.

Stelle fest, ob Monikas Behauptung richtig ist.

*Anmerkung:* Eine Untersuchung, ob diese 3 Möglichkeiten, falls es sie gibt, die einzigen sind, ist nicht erforderlich.

Aufgabe 110523:

Am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" beteiligten sich 1970 von einer Oberschule insgesamt 216 Schüler. Das waren dreimal so viele wie im Jahr 1969. Im Jahr 1969 gab es an derselben



Schule doppelt so viele Teilnehmer am alpha-Wettbewerb wie im Jahr 1968.

Berechne jeweils die Anzahl aller Schüler dieser Oberschule, die am alpha-Wettbewerb der Jahre 1968 und 1969 teilgenommen haben!

Aufgabe 110524:

Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen  $z$ , von denen jede alle folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

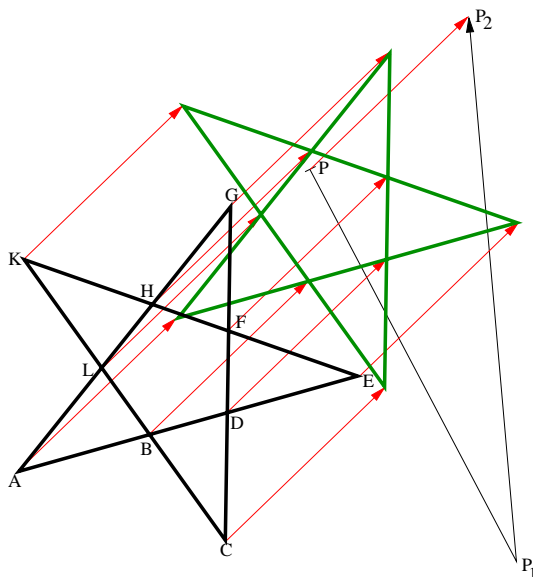
- (a) Die Zahl  $z$  ist nicht durch 10 teilbar.
- (b) Subtrahiert man die Einerziffer der Zahl von ihrer Zehnerziffer, so erhält man 4.
- (c) Vertauscht man die Ziffern von  $z$  miteinander, dann erhält man eine neue zweistellige Zahl  $z_1$ , deren Dreifaches kleiner ist als  $z$ .



11. Mathematik-Olympiade  
2. Stufe (Kreisolympiade)  
Klasse 5  
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 110521:



Die beiden Verschiebungen können auch zu einer zusammengefaßt werden, wenn die neue Verschiebung von  $P$  nach  $P_2$  genutzt wird. Dabei werden durch jeden Punkt Parallelen zum Verschiebungspfeil  $\overrightarrow{PP_2}$  eingezeichnet und mit entsprechender Länge abgetragen.

*Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel*

Lösung 110522:

Da es hierbei nur um den Nachweis der Existenz dieser 3 Möglichkeiten geht, muß nicht nachgewiesen werden, daß es keine weiteren Lösungen geben kann. Die 3 Möglichkeiten werden nun systematisch gesucht:

Zunächst werden alle Zweimarkstücke zusammengezählt, und es wird ermittelt, wieviel Geld dann für den Betrag von 21 Mark fehlen:  $8 \cdot 2 = 16 \Rightarrow 21 - 16 = 5$ . Daraus folgt, daß Bernd mit 8 Zweimarkstücken und einem Fünfmarmstück den exakten Betrag an Monika abrechnen kann.

Ändert man die Anzahl der Zweimarkstücke, muß man einen solchen Betrag ändern, der durch Fünfmarmstücke ersetzt werden kann, denn sonst würde Bernd keinen passenden Betrag abgeben. Monika hingegen könnte nur Zweimarkstücke zurückgeben, was der Aufgabenstellung widerspricht. Ein Betrag, den man aus Zweimarkstücken addiert, der gleichzeitig durch 5 teilbar ist, ist im kleinsten Fall 10. Nun werden also statt 8 Zweimarkstücken nur  $8 - 5 = 3$  Zweimarkstücke und entsprechend 3 Fünfmarmstücke abgegeben, was wiederum  $(3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21)$  exakt 21 Mark ergibt.

Man kann nun nicht mehr weitere 5 Zweimarkstücke weglassen. Also muß als letzte Möglichkeit der Fall untersucht werden, kein Zweimarkstück zu übergeben. Mit weniger als 5 Fünfmarmstücken ist der zu zahlende



Betrag noch nicht erreicht. Bei 5 Fünfmärkstücken würde Bernd 25 Mark abgeben und mit  $2 \cdot 2$  Mark den korrekten Betrag zurückerhalten. Dies wäre also die dritte Möglichkeit.

*Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel*

Lösung 110523:

1969 nahm ein Drittel der Teilnehmer von 1970 teil, das sind  $216 : 3 = 72$  Schüler.

1968 nahm die Hälfte der Teilnehmer von 1969 teil, das sind  $72 : 2 = 36$  Schüler.

*Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel*

Lösung 110524:

Die Zehnerziffer der Zahl sei  $a$ , die Einerziffer  $b$ . Dann lassen sich die Bedingungen wie folgt umschreiben:

(a)  $b \neq 0$

(b)  $a - b = 4$

(c)  $z = 10a + b > 3 \cdot (10b + a) = z_1$

Gleichung (b) wird nun in (c) eingesetzt:

$$10 \cdot (b + 4) + b > 3 \cdot (10b + b + 4)$$

$$11b + 40 > 33b + 12$$

$$22b < 28$$

Da  $0 < b \leq 9$  muß  $b = 1$  gelten. Damit würde sich  $a = 5$  und damit  $z = 51$  ergeben. Mit  $z_1 = 15$  ist die Aussage (c) erfüllt; (a) und (b) sind ebenfalls wahre Aussagen. Damit ergibt sich als einzige Lösung  $z = 51$ .

*Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel*