10. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101021:

Beweisen Sie, daß jede mehrstellige natürliche Zahl größer ist als das aus ihren sämtlichen Ziffern gebildete Produkt!

Aufgabe 101022:

Vier Personen A, B, C und D machen in einem Spiel je drei Aussagen über denselben Gegenstand, einen einfarbigen Ball. Die Aussagen lauten:

A (1) Der Ball ist weder rot noch gelb.
(2) Der Ball ist entweder rot oder grün.
(3) Der Ball ist schwarz.

B (1) Wenn der Ball nicht gelb ist, ist er weiß.
(2) A macht eine falsche Aussage, wenn er sagt, der Ball ist schwarz.
(3) Der Ball ist grün.

C (1) Der Ball ist entweder schwarz oder grün.
(2) Der Ball ist rot.
(3) Der Ball ist entweder grün oder schwarz oder gelb.

D (1) Der Ball hat die gleiche Farbe wie mein Pullover.
(2) Wenn der Ball gelb ist, ist er nicht schwarz.
(3) Der Ball ist schwarz und grün.

Ermitteln Sie die Farbe des Balles für die folgenden beiden Fälle und untersuchen Sie, ob allein mit den vorliegenden Angaben die Farbe des Pullovers von D ermittelt werden kann! Wenn ja, geben Sie diese Farbe an!

Fall a) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei wahr.

Fall b) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei falsch.

Aufgabe 101023:

In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge a sei M der Mittelpunkt des Umkreises. S sei ein Punkt der in M auf der Ebene des Dreiecks errichteten Senkrechten, für den $\overline{AB} : \overline{SM} = 3 : \sqrt{6}$ gilt.

Beweisen Sie, daß das Tetraeder mit den Ecken A, B, C, S regulär ist, d.h. daß alle Kanten dieses Tetraeders gleich lang sind!

Aufgabe 101024:

Es seien m und n beliebige ganze Zahlen.

Beweisen Sie, daß mindestens eine der Zahlen $x = 2mn$; $y = m^2 - n^2$; $z = m^2 + n^2$ durch 5 teilbar ist!

10. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 101021:

Sei n eine k-stellige Zahl ($k > 1$) mit führender Ziffer $z > 0$.

Dann ist einerseits $n \geq z \cdot 10^{k-1}$ und andererseits das Produkt ihrer Ziffern $\leq z \cdot 9^{k-1}$, also echt kleiner als n selbst, $\square$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101022:

a) Die Aussage D (2) ist offenbar wahr und D (3) offensichtlich falsch, da es um einen einfarbigen Ball geht. Also muss auch D (1) wahr sein und Ds Pullover hat die gleiche Farbe wie der Ball.

Wäre C (3) falsch, so wäre der Ball insbesondere weder grün noch schwarz, sodass auch Aussage C (1) falsch sein müsste. Dann hätte C aber nur höchstens eine wahre Aussage getroffen, was im Widerspruch zur Annahme dieses Aufgabenteils a) steht. Also muss C (3) richtig sein; die Farbe des Balls ist damit grün, schwarz oder gelb. Und damit nicht rot, sodass C (2) falsch ist und damit auch C (1) wahr sein muss, was die Farbe des Balls auf schwarz oder grün einschränkt.

Damit ist die Aussage B (1) falsch, denn der Ball ist weder gelb noch weiß. Demnach müssen B (2) und B (3) wahr sein, sodass der Ball (und damit auch der Pullover) grün sein muss. Tatsächlich sind dann auch die Aussagen A (1) und A (2) wahr, während A (3) falsch ist. Es handelt sich damit tatsächlich um eine Lösung.

b) Wieder sehen wir direkt ein, dass D (2) wahr und D (3) falsch ist. Nun folgt aber, dass dann auch D (1) falsch sein muss, sodass wir nur wissen, dass Ball und Pullover verschiedene Farben haben.

Da D(1) die einzige Aussage ist, die die Farbe des Pullovers thematisiert, können wir keine weiteren Schlüsse zu dieser ziehen und damit dessen Farbe auch nicht angeben.

Zur weiteren Bestimmung der Farbe des Balls betrachten wir nun die Aussage C (1): Ist der Ball entweder schwarz oder grün, so natürlich erst recht auch entweder grün oder schwarz oder gelb.

Aus der Gültigkeit von C (1) würde direkt auch die von C (3) folgen, sodass C nur höchstens eine falsche Aussage getroffen hätte, was der Annahme für diesen Aufgabenteil b) widerspricht. Also muss C (1) falsch sein, sodass der Ball weder schwarz noch grün ist. Von den beiden übrigen Aussagen von C muss genau eine wahr sein, sodass der Ball entweder rot oder gelb ist.

Damit ist aber die Aussage B (1) falsch, denn wenn der Ball nicht gelb ist, muss er ja rot sein.† Da der Ball weder schwarz noch grün ist, ist B (2) wahr und B (3) falsch, sodass auch B genau zwei falsche

†Es stellt sich jedoch die Frage, wie B zu dieser Schlussfolgerung gelangt.

Aussagen getroffen hat.

Schließlich sind die Aussagen A (3) und A (1) falsch, sodass A (2) wahr sein muss, was, da der Ball nicht grün ist, nur geht, wenn der Ball rot ist. Damit ist der Ball also rot und das einzige, was wir über den Pullover aussagen können, ist, dass er nicht rot ist.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101023:

Da die Figur durch Drehung um die Gerade SM um $120°$ in sich selbst übergeht, ist $|AS| = |BS| = |CS|$ schon gegeben. Da das Dreieck $\triangle AMS$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei M ist, gilt die Beziehung $|AS|^2 = |AM|^2 + |MS|^2$. Es verbleibt also $|AM|$ zu berechnen:

Da die Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Höhen zusammenfallen, berechnet sich deren Länge zu $s^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$, also $s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Da die Seitenhalbierenden sich im Verhältnis $2:1$ schneiden und der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck mit dessen Umkreismittelpunkt zusammenfällt, ist $|AM| = \frac{2}{3} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Einsetzen liefert nun

$$|AS^2| = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 a^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 a^2 = \left(\frac{3}{9} + \frac{6}{9}\right) \cdot a^2 = a^2$$

also $|AS| = a = |BS| = |CS| = |AB| = |AC| = |BC|$, $\square$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101024:

Ist m oder n durch 5 teilbar, so auch x. Andernfalls sind sowohl $m^4 - 1$ als auch $n^4 - 1$ und damit auch

$$(m^4 - 1) - (n^4 - 1) = m^4 - n^4 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = yz$$

durch 5 teilbar, sodass auch mindestens eine der Zahlen y oder z durch 5 teilbar sein muss, $\square$.

Bemerkung: Dass für eine nicht durch 4 teilbare ganze Zahl t die Zahl $t^4 - 1$ durch 5 teilbar sein muss, folgt aus dem kleinen Satz von Fermat oder auch via

$$(5s \pm 1)^4 = 5^4 s^4 \pm 4 \cdot 5^3 s^3 \cdot 1 + 6 \cdot 5^2 s^2 \cdot 1^2 \pm 5s \cdot 1^3 + 1^4 - 1 \quad \text{und}$$
$$(5s \pm 2)^4 = 5^4 s^4 \pm 4 \cdot 5^3 s^3 \cdot 2 + 6 \cdot 5^2 s^2 \cdot 2^2 \pm 4 \cdot 5s \cdot 2^3 + 2^4 - 1$$

welche wegen $1^4 - 1 = 0$ und $2^4 - 1 = 15$ alle durch 5 teilbare Zahlen sind.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix