# 10. Mathematik Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 9
# Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

# 10. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 9
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100911:

Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr $X$:

"Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre."

Können die Angaben von Herrn $X$ zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr $X$? (Angaben in vollen Lebensjahren)

Aufgabe 100912:

Es seien $a$, $b$, $c$ positive reelle Zahlen. In einer Ebene $\varepsilon$ liege ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. Ferner sei $S$ ein Punkt der in $A$ auf $\varepsilon$ errichteten Senkrechten, wobei $\overline{AS} = c$ gelte.

Man beweise, daß es dann genau eine Kugel gibt, auf der die Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, $S$ liegen, und berechne aus den gegebenen Längen $a$, $b$, $c$ die Länge des Durchmessers dieser Kugel!

Aufgabe 100913:

Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 fortlaufend auf folgende Weise hintereinandergeschrieben:

$$12345678910111213...9989991000.$$

Es ist zu beweisen, daß die so entstandene Zahl nicht durch 1 971 teilbar ist.

Aufgabe 100914:

In einer alten Aufgabensammlung wird das *Urteil des Paris* folgendermaßen beschrieben:

Die Göttinnen Hera, Aphrodite und Athene fragen den klugen Paris, wer von ihnen die Schönste sei. Sie machen dabei folgende Aussagen:

| | | |
|---|---|---|
| Aphrodite: | *Ich bin die Schönste.* | (1) |
| Athene: | *Aphrodite ist nicht die Schönste.* | (2) |
| Hera: | *Ich bin die Schönste.* | (3) |
| Aphrodite: | *Hera ist nicht die Schönste.* | (4) |
| Athene: | *Ich bin die Schönste.* | (5) |

Paris, der am Wegrand ausruht, hält es nicht der Mühe wert, das Tuch, das seine Augen vor den Sonnenstrahlen schützt, zu entfernen. Er soll aber genau eine der drei Göttinnen als die Schönste feststellen. Dabei setzt er voraus, daß alle Aussagen dieser Schönsten wahr, alle Aussagen der beiden anderen Göttinnen jedoch falsch sind.

Kann Paris unter dieser Voraussetzung die von ihm geforderte Feststellung erhalten? Wenn ja, wie lautet diese?

OJM

# 10. Mathematik-Olympiade
## 1. Stufe (Schulolympiade)
## Klasse 9
## Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 100911:

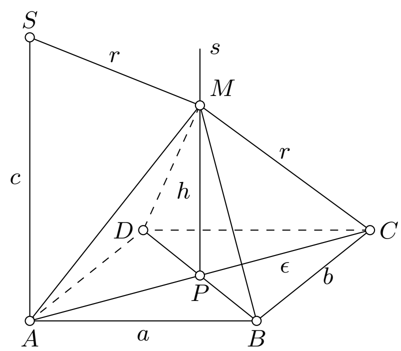
a) Wenn die Angaben von Herrn $X$ zutreffen, ist das Quadrat der erwähnten Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre und diese wiederum dreimal so groß wie die erwähnte Quersumme. Daher ist das Quadrat dieser Quersumme genau neunmal so groß wie die Quersumme selbst. Daraus folgt, daß 9 die Quersumme und somit 27 Jahre das Alter von Herrn $X$ ist.

b) Ist 27 Jahre das Alter von Herrn $X$, so ist 9 die Quersumme der Anzahl seiner Lebensjahre, also ein Drittel dieser Anzahl. Ferner ist dann das Quadrat 81 der Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre des Herrn $X$. Daher treffen die Angaben von Herrn $X$ zu.

Aus b) folgt, daß die Angaben von Herrn $X$ zutreffen können. Hierzu und aus a) folgt: Herr $X$ ist 27 Jahre alt.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)*

Lösung 100912:




a) Angenommen, $k$ sei eine Kugel der verlangten Art, und $M$ sei ihr Mittelpunkt. Dann haben sie Strecken $MA$, $BM$, $MC$, $MD$, $MS$ alle die gleiche Länge, die mit $r$ bezeichnet sei. Ist $P$ der Fußpunkt und $h$ die Länge des Lotes von $M$ auf $\varepsilon$, so ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|PA|^2 = |PB|^2 = |PC|^2 = |PD|^2 = r^2 - h^2,$$

also $|PA| = |PB| = |PC| = |PD|$. Daher ist $P$ der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$. Der Punkt $M$, der somit auf der in $P$ auf $\varepsilon$ errichteten Senkrechten $s$ liegt, muß demnach in der Ebene $\varepsilon_1$ liegen, die durch die Punkte $A$, $C$ und $S$ geht; denn diese Ebene enthält die auf $\varepsilon$ senkrechte Strecke

$AS$, steht also auf $\varepsilon$ senkrecht und geht durch $P$, sie enthält also die Gerade $s$.

Daher und wegen $|MA| = |MC| = |MS|$ ist $M$ der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\Delta ACS$. Da dieses wegen $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$, also $AS \perp AC$ bei $A$ rechtwinklig ist, ist $M$ der Mittelpunkt seiner Hypotenuse $CS$.

b) Umgekehrt hat in der Tat diejenige Kugel $k$, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt $M$ der Strecke $CS$ ist und die durch $C$ geht, die verlangte Eigenschaft. Zunächst geht $k$ nämlich außer durch $C$ wegen $|MC| = |MS|$ auch durch $S$. Ist ferner $P$ der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$, so ist

$$\Delta MPA \simeq \Delta MPB \simeq \Delta MPC \simeq \Delta MPD.$$

Also ist $|MA| = |MB| = |MD|$, und daher geht die Kugel $k$ auch durch $A$, $B$ und $D$.

c) Die Länge des Durchmessers der Kugel $k$ beträgt nach dem Satz des Pythagoras

$$|CS| = \sqrt{|AC|^2 + |AS|^2} = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 + AS|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)*

Lösung 100913:

Es gilt 9|1971. Wenn die angegebene Zahl durch 1971 teilbar wäre, dann wäre sie mithin auch durch 9 teilbar. Ihre Quersumme läßt sich folgendermaßen ermitteln: Jede der Zahlen 2 bis 9 tritt in dieser Quersumme genau 300mal als Summand auf, da jede dieser Zahlen in den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 als Ziffer genau 100mal an der Einerstelle, 100mal an der Zehnerstelle und 100mal an der Hunderterstelle auftritt.

Die Eins tritt 301mal auf, da sie außerdem noch einmal in der Tausenderstelle vorkommt. Die Nullen bleiben unberücksichtigt, da sie für die Berechnung der Quersumme keine Bedeutung haben. Also erhält man

$$300 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 1 = 300 \cdot 45 + 1.)$$

Diese Zahl ist nicht durch 9 teilbar. Daher ist auch die angegebene Zahl nicht durch 9 und damit auch nicht durch 1971 teilbar.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)*

Lösung 100914:

Die Aussagen 1., 3. und 5. bringen Paris nicht weiter, denn sie lauten gleich, sind wahr, wenn von der Schönsten ausgesprochen und falsch, wenn von einer anderen Göttin ausgesprochen.
Nun Fallunterscheidung und Prüfung der Aussagen 2. und 4.:

*1. Fall:* Aphrodite ist die Schönste. Wenn Athene dies leugnet (2.) und Aphrodite Hera wahrheitsgemäß als nicht die Schönste bezeichnet, so ergibt sich kein Widerspruch. ⇒ Aphrodite kann die Schönste sein.

*2. Fall:* Athene ist die Schönste. Die 4. Aussage müßte dann aber falsch sein, da nicht von der Schönsten ausgesprochen, was bedeutet, daß Hera die Schönste sei und ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

*3. Fall:* Hera ist die Schönste. Die 2. Aussage müßte dann aber falsch sein, da nicht von der Schönsten ausgesprochen, was bedeutet, daß Aphrodite die Schönste sei und ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Damit ergibt sich die eindeutige Lösung, daß Aphrodite die Schönste ist, wenn die von Paris getroffenen Voraussetzungen genutzt werden.

*Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel*

# Quellenverzeichnis

**(12)** Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag