10. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100811:

Ermittle die Anzahl aller sechsstelligen natürlichen Zahlen, in denen die Ziffernfolge 1970 (d.h. die Grundziffern 1, 9, 7, 0 in dieser Reihenfolge und ohne dazwischenstehende andere Ziffern) auftritt!

Wie lautet die kleinste und wie die größte dieser sechsstelligen Zahlen?

Aufgabe 100812:

Ermittle alle rationalen Zahlen x mit $x \neq 2$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{3x}{x-2} + 1 + \frac{4}{x-2} = 2 + \frac{3(x+1)}{x-2} + \frac{1}{x-2}$$

Aufgabe 100813:

Es sei ΔABC ein beliebiges Dreieck, und es sei D der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks ΔABC mit der Seite AB.

Beweise: Die Länge der Strecke AD ist gleich der Differenz aus dem halben Umfang des Dreiecks und der Länge der Seite BC.

Aufgabe 100814:

Ein Würfel werde von allen denjenigen Ebenen geschnitten, die durch die Mittelpunkte jeweils der drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten verlaufen. Dabei entsteht ein Restkörper.

a) Stelle diesen Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm und den Restkörper in einem Schrägbild ($\alpha = 60°$; $q = \frac{1}{3}$) dar!

b) Ermittle die Anzahl aller Eckpunkte und die Anzahl aller Kanten des Restkörpers!

c) Gib die Form und die Anzahl aller Teilflächen der Oberfläche des Restkörpers an!

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 100811:
Bezeichnet man die beiden fehlenden Ziffern der gesuchten Zahl mit x und y, so können sechsstellige Zahlen der angegebenen Art nur die folgenden Formen haben:

a) $\overline{xy1970}$ mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$,

b) $\overline{x1970y}$ mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$,

c) $\overline{1970xy}$ mit $0 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$.

Alle diese Zahlen sind voneinander verschieden; denn gehören zwei von ihnen zu derselben mit a), b) oder c) bezeichneten Gruppe, so ist diejenige von ihnen die kleinere, in der auch die aus $\overline{x}$ und $\overline{y}$ gebildete zweistellige Zahl $\overline{xy}$ die kleinere ist; gehören sie dagegen zu verschiedenen Gruppen, so unterscheiden sie sich (z.B.) in ihrer dritten Ziffer.

In Gruppe a) und b) gibt es nun jeweils genau so viele Zahlen der geforderten Art, wie es Zahlen $\overline{xy}$ mit $10 \leq \overline{xy} \leq 99$ gibt, das sind je genau 90 Zahlen, in Gruppe c) so viele, wie es Zahlen $\overline{xy}$ mit $0 \leq \overline{xy} \leq 99$ gibt, das sind genau 100 Zahlen.

Somit beträgt die gesuchte Anzahl $2 \cdot 90 + 100 = 280$.

Nach dem Vorherigen ist ferner jeweils die kleinste bzw. die größte Zahl

in Gruppe a) 101 970 bzw. 991 970,

in Gruppe b) 119 700 bzw. 919 709,

in Gruppe c) 197 000 bzw. 197 099.

Folglich ist die insgesamt kleinste der beschriebenen Zahlen 101 970 und die insgesamt größte 991 970.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 100812:
Angenommen, die Gleichung hätte eine rationale Lösung x mit $x \neq 2$. Dann folgt aus der gegebenen Gleichung

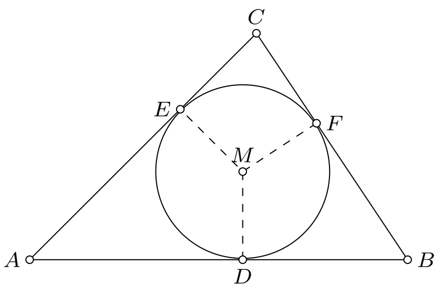
$$3x + x - 2 + 4 = 2x - 4 + 3x + 3 + 1$$

Daraus folgt $x = 2$ im Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq 2$. Daher war die Annahme falsch, d.h., es gibt keine rationale Zahl x mit $x \neq 2$, die die gegebene Gleichung erfüllt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 100813:

Es sei E der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AC, F der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite BC.



Dann gilt $AD = AE$, $BD = BF$, $CE = CF$ je als Tangentenabschnitte von einem Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis. Der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ ist also:

$$AB + BC + AC = 2AD + 2CF + 2BF$$

Daraus folgt:

$$AD = \frac{AB + BC + AC}{2} - (CF + BF)$$

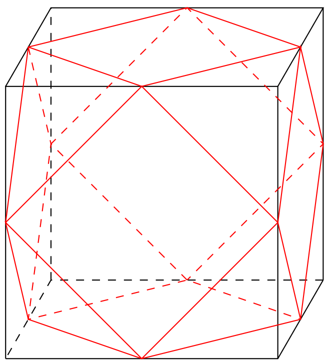
Da $BF + CF = BC$ ist, folgt

$$AD = \frac{AB + BC + AC}{2} - BC$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 100814:

a)



b) Die Eckpunkte des Restkörpers sind genau alle Mittelpunkte der Kanten des Würfels. Da der Würfel genau 12 Kanten hat, deren Mittelpunkte sämtlich voneinander verschieden sind, hat der Restkörper folglich genau 12 Eckpunkte.

Die Kanten des Restkörpers sind genau alle diejenigen Strecken, die die Mittelpunkte je zweier von einem Eckpunkt des Würfels ausgehender Kanten miteinander verbinden.

Jede dieser Verbindungsstrecken verläuft innerhalb einer Seitenfläche des Würfels, und zwar liegen in jeder der 6 Seitenflächen genau 4 verschiedene Verbindungsstrecken. Deren Anzahl beträgt folglich genau 24.

c) Die in jeder Seitenfläche des Würfels liegenden 4 Kanten des Restkörpers begrenzen eine der gesuchten Teilflächen, nämlich ein Quadrat (da durch die Verbindungsstrecken von je zwei aufeinanderfolgenden Seitenmitten eines Quadrates wieder ein Quadrat begrenzt wird). Solche quadratischen Teilflächen gibt es folglich genau 6.

   Die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte je dreier von einem Eckpunkt des Würfels ausgehender Kanten begrenzen eine der gesuchten Teilflächen, nämlich ein gleichseitiges Dreieck (da diese 3 Verbindungsstrecken als Seiten dreier kongruenter vorhin genannter Quadrate gleichlang sind). Solche gleichseitigen Dreiecke gibt es folglich genau 8.

   Diese 14 Teilflächen schließen sich bereits zur Oberfläche eines Körpers zusammen (wie man z.B. daran erkennt, dass sich um jeden Eckpunkt des Restkörpers 4 Teilflächen lückenlos zusammenschließen). Daher hat die Oberfläche des Restkörpers keine weiteren Teilflächen.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission