9. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091241:

An einem internationalen Zeltlager nimmt eine Gruppe von 30 Freunden teil, von denen ein Teil Deutsch, ein Teil Russisch und ein Teil Französisch beherrschen, und zwar beherrschen einige Freunde nur eine Sprache, einige zwei Sprachen und einige sogar drei Sprachen.

Die Anzahl der Freunde, die genau zwei Sprachen beherrschen, ist mehr als doppelt so groß, jedoch weniger als dreimal so groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen. Die Anzahl der Teilnehmer, die alle drei Sprachen beherrschen, ist ebenso groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen.

Die Anzahl der Freunde, die nur Deutsch beherrschen, ist größer als die Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen, aber kleiner als die Anzahl derjenigen, die nur Französisch beherrschen. Die Anzahl derjenigen, die nur Deutsch beherrschen, ist kleiner als das Dreifache der Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen.

Geben Sie jeweils die Anzahl aller Teilnehmer dieser Gruppe an, die nur Deutsch, nur Russisch, nur Französisch, alle drei Sprachen beherrschen!

Aufgabe 091242:

Gegeben sei eine Gerade g und eine Strecke AB, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks ΔABC möglichst klein ist.

Aufgabe 091243:

Es ist zu beweisen, daß für jedes ganzzahlige $n \geqslant 1$ die Funktion f mit

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \text{ höchstens eine reelle Nullstelle haben kann.}$$

Aufgabe 091244:

Die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt M seien der Reihe nach mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bezeichnet.

a) Es ist zu beweisen: Die Strecken MP_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) können parallel zu sich selbst so verschoben werden, daß sie nach der Verschiebung die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks bilden.

b) Es ist zu beweisen (z.B. mit Hilfe des Satzes unter a)), daß folgende Beziehungen für alle natürlichen Zahlen n größer als 2 gültig sind:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (2)$$

Aufgabe 091245:

Es sind alle reellen Zahlen λ anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x)$$

a) keine, b) genau eine, c) genau zwei, d) mehr als zwei

reelle Lösungen im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hat.

Aufgabe 091246:

Es ist zu beweisen, daß für jedes Quadrupel positiver reeller Zahlen a, b, c, d die Beziehung

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

gilt, und es ist zu untersuchen, in welchen Fällen Gleichheit eintritt.

9. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 091241:

Die Gruppe der 30 Teilnehmer teilt man in drei Untergruppen a, b und c ein, wobei die Gruppenmitglieder jeweils eine, zwei oder drei Sprachen sprechen. (Entsprechend müssen dann a, b und c natürliche Zahlen kleiner gleich 30 sein.) Damit ergeben sich aus dem Aufgabentext die folgenden Gleichungen und Ungleichungen unmittelbar

$$30 = a + b + c \tag{1}$$
$$a = c \tag{2}$$
$$2a < b < 3a \tag{3}$$

Setzt man nun (2) in (1) ein, so erhält man eine Gleichung für b

$$b = 30 - 2a,$$

mit der sich aus (3) ergibt

$$2a < 30 - 2a < 3a. \tag{4}$$

Betrachtet man nun die beiden Teile von (4) getrennt, so ergeben sich zwei Bedingungen für a

$$a < 7.5$$
$$6 < a$$

aus denen man unmitelbar

$$a = 7 \tag{5}$$

schlußfolgern kann.

Im zweiten Teil der Aufgabenstellung findet man noch Informationen über die Untergruppe der Teilnehmer, die nur eine Sprache sprechen

$$a = a_F + a_D + a_R \tag{6}$$
$$a_F > a_D > a_R \tag{7}$$
$$3a_R > a_D \tag{8}$$

wobei a_F, a_D und a_R für diejenigen Teilnehmer stehen, die nur Französisch, nur Deutsch und nur Russisch sprechen. Durch Einsetzen sieht man, daß sich die Bedingungen (6), (7) und (8) nur gleichzeitig erfüllen lassen für positive a_F, a_D und a_R, wenn

$$a_R = 1 \tag{9}$$

gilt, womit aber unmittelbar

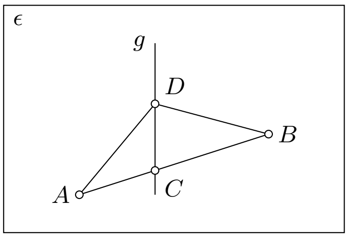
$$a_{\mathrm{F}} = 4 \quad (10)$$
$$a_{\mathrm{D}} = 2 \quad (11)$$

folgt.

Zum Abschluß seien die Ergebnisse (5), (9), (10) und (11) noch einmal in Worte gefaßt (wobei auch (2) verwendet wird): Es sprechen zwei Teilnehmer nur Deutsch, einer nur Russisch und vier nur Französisch. Alle drei Sprachen beherrschen sieben Teilnehmer. Die Probe bestätigt die Lösung, der Lösungsweg zeigt die Eindeutigkeit der gefundenen Lösung.

Aufgeschrieben und gelöst von Arnd Hübsch

Lösung 091242:



Man betrachtet die Ebene ϵ, in der die Gerade g und der Punkt A liegen. Man drehe die Ebene, die g und B enthält, so um g, dass das Bild B' von B bei dieser Drehung in der Ebene ϵ liegt, und zwar so, dass B' und A nicht auf derselben Seite von g liegen (Abbildung).

Der Schnittpunkt C der Strecke AB' mit der Geraden g ist ein Punkt der geforderten Art und der einzige.

Beweis:

Sei D ein beliebiger Punkt der Geraden g. Dann gilt: $DB = DB'$. Daher gilt auch

$$AD + DB = AD + DB'$$

Nun ist stets $AD + DB' \geq AC + CB'$ (Dreiecksgleichung), wobei das Gleichheitszeichen genau für $D = C$ gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgeschrieben und gelöst von Bernd Noack

Lösung 091243:
Wir definieren für alle nicht-negativen ganzzahligen n die Funktion

$$f_n(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

(Insbesondere ist f_0 die Funktion, die konstant 1 ist.) Dann gilt für alle $n \geq 1$ offenbar $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$.

Wir zeigen nun im Folgenden induktiv für alle nicht-negativen ganzzahligen n die schärfere Aussage: "Ist n gerade, so ist $f_n(x)$ stets positiv. Und ist n ungerade, so hat f_n genau eine Nullstelle."

Für $n = 0$ und $n = 1$ gilt (wegen $f_1(x) = 1 + x$) diese Behauptung offenbar. Sei ab nun $n \geq 2$ und es gelte diese Behauptung für $n - 1$. Wir betrachten nun die Funktion f_n mit ihrer Ableitungsfunktion f_{n-1}.

Ist n ungerade, so ist f_{n-1} nach Annahme stets positiv, also f_n streng monoton steigend. Da die höchste Potenz von x einen ungeraden Exponenten (und positiven Koeffizienten) besitzt, ist $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Da die Funktion f_n also negative wie positive Funktionswerte annimmt, stetig und streng monoton steigend ist, gibt es genau eine Stelle, an der sie den Funktionswert 0 annimmt.

Ist n dagegen gerade, so besitzt nach Annahme f_{n-1} genau eine Nullstelle x_0. Für kleinere Argumente ist f_{n-1}, wie gerade gesehen, negativ, und für größere positiv. Also ist f_n im Intervall $(-\infty, x_0)$ streng monoton fallend und im Intervall (x_0, ∞) streng monoton steigend. Damit nimmt sie an der Stelle x_0 ihr globales Maximum an. Jedoch ist $f_n(x_0) = f_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = 0 + \frac{1}{n!} \cdot x_0^n > 0$. Letzteres gilt, da der Exponent n eine gerade Zahl ist und wegen $f_{n-1}(0) = 1 \neq 0$ auch $x_0 \neq 0$ ist.

Die Behauptung der Aufgabenstellung folgt aus dieser strengeren Aussage sofort. □

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 091244:

a) Zur Vereinfachung der Notation definieren wir $P_0 := P_n$.

   Der Winkel $\sphericalangle P_{k+1}MP_k$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Radien MP_{k+1} und MP_k ergibt sich zu $\frac{2\pi}{n}$. In einem regelmäßigen n-Eck betragen alle Innenwinkel $\frac{n-2}{n} \cdot \pi = \pi - \frac{2\pi}{n}$, was genau dem Nebenwinkel zu $\sphericalangle P_{k+1}MP_k$ der Geraden, auf denen die beiden Radien liegen, entspricht.

   Startet man also mit der Strecke MP_0 und verschiebt die Strecke MP_1 parallel so, dass M auf P_0 abgebildet wird, entsteht dort der passende Innenwinkel. Diese Konstruktion kann man nun fortsetzen, indem man MP_2 parallel so verschiebt, dass M auf den Bildpunkt von P_1 abgebildet wird, sodass man einen zweiten passenden Innenwinkel angefügt hat.

   So fügt man nach und nach durch Verschiebung des Radius MP_k derart, dass M auf den Bildpunkt von P_{k-1} bezüglich der Verschiebung des vorherigen Radius' abgebildet wird, alle Radien des Ausgangs-n-Ecks als neue Kanten zu dem entstehenden n-Eck hinzu, wobei je zwei aufeinanderfolgende dieser Radien dann den Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks bilden. Weiterhin sind die Radien alle gleich lang, sodass sich tatsächlich ein regelmäßiges n-Eck bildet.

b) In die Ebene des Ausgangs-n-Ecks fügen wir derart Koordinatenbezeichnungen ein, dass der Umkreismittelpunkt dieses n-Ecks der Koordinatenursprung ist und $P_0 := P_n$ der Punkt $(1|0)$. Dann ergeben sich aufgrund der Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis und $\sphericalangle P_kMP_0 = k \cdot \frac{2\pi}{n}$ die Koordinaten der Punkte P_k zu

   $$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \middle| \sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

   Verschiebt man die Radien nun parallel, so ist die (vorzeichenbehaftete) Differenz der x-Koordinaten der Bildpunkte der Endpunkte eines solchen Radius genauso groß wie die der Endpunkte des Radius' selbst. Für die Verschiebung des Radius MP_k ergibt sich also eine solche Differenz der x-Koordinaten der Bildpunkte der Endpunkte von $\cos\frac{2k\pi}{n}$.

   Fügt man nun die Radien entsprechend Teilaufgabe a) zu einem geschlossenen Streckenzug zusammen, addieren sich also diese Differenzen der x-Koordinaten insgesamt zu Null, was genau Gleichung (1) entspricht. Analog erhält man bei der Betrachtung der Differenz der y-Koordinaten Gleichung (2). □

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 091245:

Zunächst ist klar, dass die Ausgangsgleichung

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x) \tag{1}$$

für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ stets die Lösung $x = \frac{\pi}{4}$ besitzt.

Weiterhin ist jeder Lösung $\tilde{x} \in (0, \frac{\pi}{4})$ in umkehrbar eindeutiger Weise die Lösung $\frac{\pi}{2} - \tilde{x}$ zugeordnet, da (1) gegenüber einer Vertauschung $x \leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x$ offensichtlich invariant ist.

Aus dieser Vorbemerkung folgt bereits, dass die Fälle a) und c) in der Aufgabenstellung für ein gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ gar nicht auftreten können. Ferner dürfen wir uns bei der Suche nach weiteren Lösungen außer $x = \frac{\pi}{4}$ zu einem gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}$ nun auf das Intervall $(0, \frac{\pi}{4})$ beschränken, was die Fälle b) und d) betrifft.

Wir betrachten dazu die Funktion $\tilde{\lambda} : (0, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{\lambda}(x) = \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\tan^4 x - \cot^4 x}$$

was man Kürzen durch $\sin^4 x - \cos^4 x \neq 0$ auch einfacher schreiben kann als

$$\tilde{\lambda}(x) = \frac{\sin^4 x \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\sin^4(2x)}{8(2 - \sin^2(2x))}$$

Aus der zweiten Darstellung folgt insbesondere sofort, dass $\tilde{\lambda}(x)$ auf $(0, \frac{\pi}{4})$ streng monoton steigend ist und dort jeden Wert in $(0, \frac{1}{8})$ genau einmal annimmt.

Der Fall d) (mit dann genau 3 Lösungen) tritt also genau für $\lambda \in (0, \frac{1}{8})$ ein, für die anderen $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (0, \frac{1}{8})$ bleibt es bei der einen Lösung $x = \frac{\pi}{4}$, was also dann dem Fall b) entspricht.

Aufgeschrieben und gelöst von weird

Lösung 091246:
Wir beweisen den folgenden Satz:

Gegeben seien n nichtnegative reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$. Wir betrachten die n symmetrischen Funktionen

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \\
s_2 &= \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + ... + x_{n-1}x_n}{\binom{n}{2}}} \\
&... \\
s_i &= \sqrt[i]{\frac{1}{\binom{n}{i}} \cdot \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_i \leq n} x_{j_1} x_{j_2} \cdot ... \cdot x_{j_i}} \\
s_n &= \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}
\end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x_1, x_2, ..., x_n$ die Ungleichungskette $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$.

Offenbar ist $s_1 \geq s_n$ die Ungleichung zwischen dem arithmetischem und geometrischem Mittel.

Für $x_1 = x_2 = ... = x_n$ gilt: $s_1 = s_2 = ... = s_n = x_1$. Aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel folgt: $s_{n-1} >= s_n$ und $s_i \geq s_n, i = 1, ..., n-1$.

Wir betrachten das Polynom

$$P(x) = (x - x_1(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

$P(x)$ hat genau n nichtnegative Nullstellen $x_1, x_2, ..., x_n$ und ist ausmultipliziert:

$$P(x) = x^n - \binom{n}{1} x^{n-1} s_1 + \binom{n}{2} s_2^2 * x^{n-2} + ... + (-1)^n \binom{n}{n} s_n^n.$$

Es sei $i \in \{2, 3, .., n-1\}$. Wir betrachten die $n-i$-te Ableitung von $P(x)$:

$$P^{(n-i)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (i+1) \left(x^i - \binom{i}{1} s_1 x^{i-1} + \binom{i}{2} s_2^2 x^{i-2} \mp ... + (-1)^i \binom{i}{i} s_i^i \right)$$

Nach dem Satz von Rolle hat $P'(x)$ genau $n-1$ nichtnegative reelle Nullstellen. Per Induktion folgt sofort,dass $P^{(n-i)}(x)$ genau i nichtnegative reelle Nullstellen $(x_1)^*, (x_2)^*, ..., (x_i)^*$ hat. Dabei ist

$$(x_1)^*(x_2)^* \cdot ... \cdot (x_i)^* = \binom{i}{i} s_i^i \quad \text{und}$$

$$(x_1)^* \cdot (x_2)^* \cdot ... \cdot (x_{i-1})^* + (x_1)^*(x_2)^* \cdot ... \cdot (x_{i-2})^*(x_i)^* + ... + (x_2)^*(x_3)^* \cdot ... \cdot (x_i)^* = \binom{i}{i-1} S_{i-1}^{i-1}$$

Nach der AGM folgt:

$$\frac{1}{i}\binom{i}{i-1} S_{i-1}^{i-1} \geq \sqrt[i]{x_1^{i-1} x_2^{i-1} \cdot ... \cdot x_i^{i-1}} = \sqrt[i]{(s_i^i)^{i-1}}$$

und $s_{i-1}^{i-1} \geq s_i^{i-1}$, also $s_{i-1} \geq s_i$. Insbesondere ist $s_2 \geq s_3$.

Anmerkung:

Diese Aufgabe ging in die Mathematik Olympiade unter dem Namen "Pirlscher Hammer" ein.

Aufgeschrieben und gelöst von Sonnhard Graubner