9. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091221:

Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge a_1, a_2, ... , a_n, ... durch die (independente) Darstellung

$$a_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0, \qquad (1)$$

wobei c_0, c_1, c_2 reelle Zahlen sind. Als erste Differenzenfolge bezeichnet man die Folge $D_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n$ und als zweite Differenzenfolge die Folge $D_n^{(2)} = D_{n+1}^{(1)} - D_n^{(1)}$, $(n = 1, 2, 3, ...)$.

a) Es seien $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. Unter dieser Voraussetzung sind a_n, $D_n^{(1)}$, $D_n^{(2)}$ für $n = 1$, 2, 3, 4 und 5 zu berechnen.

b) Es ist allgemein zu beweisen, daß für (1) die Folge $D_n^{(2)}$ konstant ist.

Aufgabe 091222:

In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H und der Kantenlänge a seien FB, FG und FE die drei von F ausgehenden Kanten. Ferner sei ε die Ebene durch G, B, E.

Es ist zu beweisen, daß die Körperdiagonale FD senkrecht auf der Ebene ε steht und von ihr im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird.

Aufgabe 091223:

Es sind alle reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems anzugeben:

$$x + y = az \qquad (1)$$
$$x - y = bz \qquad (2)$$
$$x^2 + y^2 = cz \qquad (3)$$

Dabei sind a, b, c reelle Zahlen. (Fallunterscheidung!)

Aufgabe 091224:

Gegeben seien natürliche Zahlen k und n mit $0 < k < n$. In einer Schachtel liegen (offen sichtbar, so daß ihre Anzahl festgestellt werden kann) genau n Kugeln. Zwei Spieler spielen ein Spiel nach der folgenden Regel:

Die Spieler nehmen abwechselnd Kugeln aus der Schachtel heraus, und zwar sind jeweils mindestens eine und höchstens k Kugeln zu entnehmen. Wer die letzte Kugel aus der Schachtel entnehmen muß, hat verloren.

Welche Beziehung zwischen k und n muß erfüllt sein, damit

a) der anziehende Spieler,

b) der nachziehende Spieler

den Gewinn erzwingen kann?

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 091221:

a)

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	3	7	13	21	31	43
$D(1)_n$	2	4	6	8	10	12	
$D(2)_n$	2	2	2	2	2		

b) Es ist für alle nicht-negativen ganzen Zahlen n

$$D(1)_n = a_{n+1} - a_n = c_2((n+1)^2 - n^2) + c_1((n+1) - n) + c_0 - c_0 = 2c_2 n + c_2 + c_1 \quad \text{und}$$

$$D(2)_n = D(1)_{n+1} - D(1)_n = 2c_2((n+1) - n) + (c_2 + c_1) - (c_2 + c_1) = 2c_2$$

was die Behauptung zeigt, □.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 091222:

Durch Drehung um 120° um die Raumdiagonale geht der Würfel in sich selbst über, sodass die drei Eckpunkte B, G und E zyklisch die Reihenfolge tauschen. Damit geht aber auch die Ebene ϵ bei dieser Drehung in sich selbst über und steht somit senkrecht zur Drehachse FD.

Das Tetraeder $BGEF$ hat das Volumen $\frac{1}{6}a^3$. Das gleichseitige Dreieck $\triangle BGE$ besitzt die Kantenlänge $\sqrt{2}a$ und damit einen Flächeninhalt von

$$F_{\triangle BGH} \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

Da sich das Volumen dieses Tetraeders auch als $\frac{1}{3}F_{\triangle BGH} \cdot h$ berechnen lässt, wobei h die Länge des Lots des Punktes F auf die Ebene ϵ ist, folgt

$$h = \frac{\frac{1}{6}a^3}{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{1}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{1}{3} \cdot |BD|$$

da die Raumdiagonale BD die Länge $\sqrt{3}a$ besitzt, □.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 091223:

Aus (1) und (2) folgt:

$$x = az - y = bz + y \Rightarrow az - bz = 2y \Rightarrow y = \frac{a-b}{2}z \quad \text{und} \tag{4}$$

$$x = \frac{2a - (a-b)}{2}z = \frac{a+b}{2}z. \tag{5}$$

Hieraus ergibt sich für (3):

$$cz = x^2 + y^2 = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right] z^2$$

und weiter:

$$cz = \frac{z^2}{4}(a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 - 2ab) = \frac{z^2}{2}(a^2 + b^2) \tag{6}$$

1. Fall: $z = 0 \Rightarrow$ mit (4) und (5) $x = 0$, $y = 0$

2. Fall: $z \neq 0 \Rightarrow$ mit (6) $z = \frac{2c}{a^2+b^2}$ und weiter mit (4) und (5): $x = \frac{a+b}{a^2+b^2} \cdot c$ und $y = \frac{a-b}{a^2+b^2} \cdot c$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit beider Lösungen.

Aufgeschrieben und gelöst von Hanna K

Lösung 091224:

Es gelten folgende Feststellungen:

I. Verbleibt nach einem Zug eines Spielers genau eine Kugel in der Schachtel, so hat dieser Spieler gewonnen.

II. Es sei z eine Zahl mit der Eigenschaft, daß ein Spieler den Gewinn erzwingen kann, wenn der Gegner am Zug ist und genau z Kugeln in der Schachtel liegen. Dann ist auch $k + 1 + z$ eine Zahl mit dieser Eigenschaft; denn befinden sich genau $k + 1 + z$ Kugeln n der Schachtel und ist der Gegner am Zug, so muß dieser eine Anzahl a Kugeln mit

$$1 \leq a \leq k \tag{1}$$

entnehmen, und entnimmt der erstgenannte Spieler hierauf genau $k + 1 - a$ Kugeln (was zulässig ist, da wegen (1) auch $1 \leq k + 1 - a \leq k$ gilt), so verbleiben nach diesem Zug genau z Kugeln in der Schachtel.

III. Aus I. und II. folgt: Jede Zahl z der Form

$$m(k + 1) + 1, \qquad m = 0, 1, 2, ..., \tag{2}$$

hat die genannte Eigenschaft. Insbesondere folgt hiermit als eine Lösung zu b): Ist n eine Zahl der Form (2), d.h., läßt n bei Division durch $k + 1$ den Rest 1, so kann der nachziehende Spieler den Gewinn erzwingen.

IV. Ferner folgt als eine Lösung zu a) : Ist n von der Form

$$m(k + 1) + r, \qquad m = 0, 1, 2, ..., \qquad 1 < r \leq k + 1,$$

d.h., läßt n bei Division durch $k+1$ einen von 1 verschiedenen Rest, so kann der anziehende Spieler den Gewinn erzwingen. Er kann nämlich im ersten Zug $r - 1$ Kugeln entnehmen (was wegen $0 < r - 1 \leq k$ zulässig ist), und hiernach ist die Anzahl z der verbliebenen Kugeln von der Form (2).

V. Da die unter III. und IV. angegebenen Lösungen der Aufgaben a) und b) alle überhaupt vorhandenen Möglichkeiten erschöpfen, sind sie auch jeweils die einzigen Lösungen der betreffenden Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission