9. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091031:

Geben Sie alle durch 11 teilbaren natürlichen dreistelligen Zahlen an, die bei Division durch 5 den Rest 1 und bei der Division durch 7 den Rest 3 ergeben!

Aufgabe 091032:

Ein regelmäßiges Oktaeder soll durch Ebenen so geschnitten werden, daß ein konvexer Restkörper entsteht, dessen Oberfläche sich aus genau einer Dreiecksfläche, genau drei Quadratflächen, genau drei nicht quadratförmigen Trapezflächen, genau drei Fünfeckflächen und genau einer Sechseckfläche zusammensetzt.

Geben Sie eine Möglichkeit für die Lage der Schnitte an!

Aufgabe 091033:

Geben Sie

a) eine notwendige und hinreichende,

b) eine notwendige und nicht hinreichende sowie

c) eine hinreichende und nicht notwendige

Bedingung dafür an, daß $\sqrt{1 - |\log_2 |5 - x||} > 0$ gilt!

Die anzugebenden Bedingungen sind dabei so zu formulieren, daß sie in der Forderung bestehen, x solle in einem anzugebenden Intervall oder in einem von mehreren anzugebenden Intervallen liegen.

Aufgabe 091034:

Man ermittle alle Paare reeller Zahlen a und b ($b < a$), für die die Summe beider Zahlen, das Produkt beider Zahlen und eine der Differenzen der Quadrate beider Zahlen untereinander gleich sind.

Aufgabe 091035 :

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC, und auf AB ein Punkt D.

Konstruieren Sie einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreiecksseiten so, daß DE die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt!

Aufgabe 091036 :

Von einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) denke man sich die Tabelle

x	1	2	3	4
y	1	2	n_1	n_2

gebildet.

Ermitteln Sie alle reellen Koeffizienten a, b, c, für die n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sind!

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 091031:

Sei n eine solche Zahl. Dann ist mit n auch $n - 66 = n - 11 \cdot 6$ durch 11 teilbar. Wenn n den Rest 1 bei der Division durch 5 lässt, dann ist $n - 66 = (n - 1) - 5 \cdot 13$ auch durch 5 teilbar. Und schließlich:

Wenn n bei der Division durch 7 den Rest 3 lässt, ist $n - 66 = (n - 3) - 7 \cdot 9$ auch durch 7 teilbar.

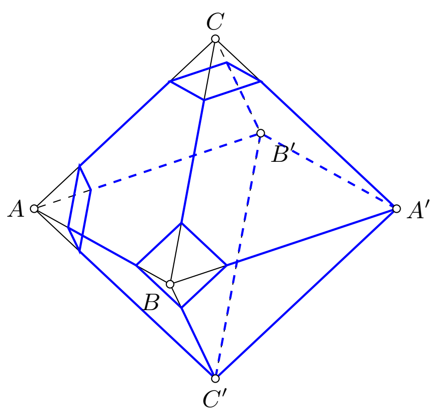
Da 5, 7 und 11 paarweise teilerfremd sind, ist $n - 66$ also sogar durch das Produkt $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$ teilbar, sodass man für n die Darstellung $n = 385 \cdot k + 66$ mit einer nicht-negativen ganzen Zahl k erhält.

Offenbar ist für $k \geq 3$ auch $n > 1000$, also nicht mehr dreistellig (und für $k = 0$ nur zweistellig), sodass man genau folgende beiden Lösungen erhält:

$$n_1 = 385 \cdot 1 + 66 = 451 \quad \text{und} \quad n_2 = 385 \cdot 2 + 66 = 836$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 091032:



Da die Anzahl der ebenen Begrenzungsflächen nach der Ausführung der Schnitte 11 betragen soll, und da ein Oktaeder ein konvexer Körper ist, muss man mindestens 3 Schnitte ausführen. Das gegebene Oktaeder habe die Eckpunkte A, B, C, A', B', C' (A' liege A gegenüber usw.).

Da 3 Quadrate als Schnittfiguren entstehen sollen, liegt es nahe, zu untersuchen, was für ein Restkörper entstehen kann, wenn man die Schnitte parallel zu zweien oder dreien der Quadrate $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$ legt, und zwar so nahe bei den hierdurch abgeschnittenen Eckpunkten (C oder C' bzw. B oder B' bzw. A oder A'), dass die Schnittflächen sich gegenseitig nicht treffen.

Dabei werden drei vierseitige Pyramiden abgeschnitten. Da auch ein Sechseckfläche entstehen soll, wähle man die drei abzuschneidenden Pyramiden so, dass unter deren Spitzen keine zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Oktaeders vorkommen, also etwas die Eckpunkte A, B, C als Spitzen auftreten.

Man überzeugt sich leicht, dass man damit einen Körper der geforderten Art erhält.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 091033:

Damit die Wurzel definiert ist, muss der Radikand nicht-negativ sein.

Dafür muss also $|\log_2 |5-x|| \leq 1$ bzw. $-1 \leq \log_2 |5-x| \leq 1$ gelten, was äquivalent ist zu $\frac{1}{2} \leq |5-x| \leq 2$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall $5-x \geq 0$, also $x \leq 5$: Dann muss $\frac{1}{2} \leq 5-x \leq 2$ gelten, was äquivalent zu $x \in \left[3; \frac{9}{2}\right]$ ist.
2. Fall $5-x < 0$, also $x > 5$: Dann ist $|5-x| = -(5-x) = x-5$ und es muss $\frac{1}{2} \leq x-5 \leq 2$ gelten, was äquivalent ist zu $x \in \left[\frac{11}{2}; 7\right]$.

Zusammengefasst, ergibt sich also eine notwendige (und, wie wir gleich sehen werden, nicht hinreichende) Bedingung dafür, dass die gegebene Gleichung erfüllt ist, durch

$$x \in \left[3; \frac{9}{2}\right] \qquad \text{oder} \qquad x \in \left[\frac{11}{2}; 7\right]$$

denn sonst wäre die Wurzel gar nicht definiert. (Dies beantwortet dann Teil b).)

Im Falle, dass die Wurzel definiert ist, die Gleichung aber nicht gilt, muss die Wurzel, und damit auch ihr Radikand, Null werden, sodass dann $|\log_2 |5-x|| = 1$, also $\log_2 |5-x| \in \{-1, 1\}$ und damit $|5-x| \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ gelten muss. Es ergibt sich weiter $5-x \in \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$, also diesen Gedanken abschließend $x \in \left\{3; \frac{9}{2}; \frac{11}{2}; 7\right\}$. Nur genau dann, wenn x einen dieser vier Werte annimmt, wird die Wurzel 0, ist also definiert, aber nicht echt positiv.

Somit ergibt sich eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Ungleichung der Aufgabenstellung zu

$$x \in \left(3; \frac{9}{2}\right) \qquad \text{oder} \qquad x \in \left(\frac{11}{2}; 7\right)$$

was dann Teil a) beantwortet.

Eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung, wie sie Teil c) fordert, erhält man etwa dadurch, dass man nur eines der beiden Intervalle betrachtet, also z.B. ausschließlich $x \in \left(3; \frac{9}{2}\right)$ fordert.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 091034:

$$a + b = a \cdot b \tag{1}$$
$$b^2 - a^2 = a \cdot b \tag{2}$$
$$b^2 - a^2 = a + b \tag{3}$$

Aus (3) und der binomischen Formel folgt:

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = a + b \Rightarrow b - a = 1 \quad \text{für} \quad a + b \neq 0, \quad \text{also} \quad a = b - 1.$$

Setzt man dies in (1) ein, folgt:

$$b - 1 + b = (b-1) \cdot b \Rightarrow 0 = b^2 - 3b + 1$$

mit den Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$b_{1/2} = 1,5 \pm 0,5 \cdot \sqrt{5}$$

Für a ergibt sich entsprechend $a = b - 1 \Rightarrow a_{1/2} = 0,5 \pm 0,5 \cdot \sqrt{5}$

Nun muß noch der oben ausgeschlossene Fall $a + b = 0$ untersucht werden. In (1) gilt: $-b + b = -b \cdot b \Rightarrow 0 = b^2 \Rightarrow b_3 = 0$ und $a_3 = 0$.

Die Probe zeigt die Richtigkeit aller Lösungen.

Aufgeschrieben und gelöst von Matthias Lösche

Lösung 091035:

O.B.d.A. können wir $|AD| \geq \frac{1}{2}|AB|$ annehmen. (Andernfalls vertausche man im Folgenden jeweils die Rollen von A und B.)

Ist $D = B$, so wähle man E als Mittelpunkt der Seite AC (den man mit der üblichen Konstruktionsweise erhält). Das Dreieck $\triangle DEA = \triangle BEA$ besitzt die gleiche Höhe von A auf die Grundseite auf der Geraden g_{BE} wie das Dreieck $\triangle ABC$ auf dessen Grundseite, die wegen $g_{BC} = g_{BE}$ auf der gleichen Geraden liegt, während diese Grundseite im Dreieck $\triangle BEA$ aber nach Konstruktion nur halb so lang ist wie die entsprechende im Dreieck $\triangle ABC$. Damit besitzt es also auch genau die Hälfte von dessen Flächeninhalt.

Ist D identisch mit dem Mittelpunkt M der Strecke AB, so wähle man $E = C$ und man erhält mit der gleichen Begründung, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AED = \triangle ACM$ genau halb so groß ist wie der des Ausgangsdreiecks $\triangle ABC$. Diesmal wird die Höhe von C auf die Grundseiten AE bzw. AB betrachtet.

Sei im Folgenden also nun D ein innerer Punkt der Strecke MB. Dann konstruiere man E als Schnittpunkt der Parallelen zu DC durch M mit der Geraden AC. (Da M innerer Punkt der Strecke AD ist, schneidet die Parallele zu DC durch M die Gerade g_{AC} im Inneren der Strecke AC.) Dann hat das Dreieck $\triangle ADE$ genau den halben Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, wie im Folgenden gezeigt wird:

Das Dreieck $\triangle ADC$ besitzt wieder die gleiche Höhe von C auf auf die Gerade $g_{AD} = g_{AB}$ wie das Dreieck $\triangle ABC$, sodass sich

$$F_{\triangle ADC} = \frac{|AD|}{|AB|} \cdot F_{\triangle ABC}$$

ergibt.

Analog kann man die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle ADE$ in Beziehung setzen, wenn man beachtet, dass sie die gleiche Höhe von D auf die Gerade $g_{AC} = g_{AE}$ besitzen. Es ist also

$$F_{\triangle ADE} = \frac{|AE|}{|AC|} \cdot F_{\triangle ADC} = \frac{|AE|}{|AC|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|} \cdot F_{\triangle ABC}$$

Nach dem Strahlensatz (da die Geraden g_{DC} und g_{ME} nach Konstruktion parallel sind und von zwei von A ausgehenden Strahlen geschnitten werden) gilt aber $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AM|}{|AD|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|}{|AD|}$, sodass man nach Einsetzen genau das gewünschte Resultat

$$F_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot F_{\triangle ABC}$$

erhält.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 091036:

Aus der Funktionsgleichung und der Tabelle ergibt sich für $x = 1$ bzw. $x = 2$

$$a + b + c = 1, \qquad (1)$$
$$4a + 2b + c = 2 \qquad (2)$$

Subtrahiert man (1) von (2) bzw. 2 mal (1) von (2), erhält man

$$3a + b = 1, \tag{3}$$
$$2a - c = 0 \tag{4}$$

und hieraus $b = 1 - 3a$ und $c = 2a$. Für die quadratische Funktion ergibt sich somit

$$y = ax^2 + (1 - 3a)x + 2a \tag{5}$$

Einsetzen von $x = 3$ bzw. $x = 4$ liefert

$$n_1 = 9a + 3(1 - 3a) + 2a = 2a + 3 \tag{6}$$
$$n_2 = 16a + 4(1 - 3a) + 2a = 6a + 4 \tag{7}$$

Da n_1 aus $\{0, 1, ..., 9\}$ sein soll, ergibt sich aus (6) und (7) folgende Tabelle

n_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
n_2	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22

Da auch n_2 aus $\{0, 1, ..., 9\}$ und außerdem a nicht 0 sein soll, verbleiben für a nur die beiden Lösungen $a = -\frac{1}{2}$ und $a = \frac{1}{2}$.

Für die Funktionsgleichung folgt dann aus (5):

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1 \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Quellenverzeichnis

(28) alpha, Mathematische Schülerzeitschrift