9. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091021:

Ermitteln Sie ohne Verwendung der Logarithmentafel den Quotienten $\frac{[\lg 3790]}{[\lg 0{,}0379]}$!

Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die x nicht übertrifft.

Aufgabe 091022:

Gesucht sind vier natürliche Zahlen $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ so, daß jede der Zahlen

$$d_1 = a_4 - a_3; \quad d_2 = a_3 - a_2; \quad d_3 = a_2 - a_1; \quad d_4 = a_4 - a_2; \quad d_5 = a_3 - a_1; \quad d_6 = a_4 - a_1$$

eine Primzahl ist, wobei auch gleiche Primzahlen auftreten dürfen.

Aufgabe 091023:

Gegeben sind zwei Strecken der Längen m und n (mit $n < m$).

a) Führen Sie folgende Konstruktion aus:

Um einen beliebigen Punkt Y einer Geraden g werde ein Kreis k_1 mit dem Radius m geschlagen. Einer der Schnittpunkte von g und k_1 sei A genannt, der andere E. Von A aus werde die Strecke AB mit $\overline{AB} = n$ so auf g abgetragen, daß B zwischen A und Y liegt (das ist wegen $n < m$ möglich). Von B aus werde auf g die Strecke BC mit $\overline{BC} = m$ so abgetragen, daß A zwischen B und C liegt (das ist wieder wegen $n < m$ möglich). Um C werde ein Kreis k_2 mit dem Radius $\overline{BC}$ geschlagen. Einer der Schnittpunkte von k_1 und k_2 sei D genannt.

b) Ermitteln Sie die Länge x der Strecke AD!

Aufgabe 091024:

Mit welchen der folgenden Bedingungen (1), ..., (5) ist die Bedingung $3x^2 + 6x > 9$ äquivalent?

(1) $-3 < x < 1$ (2) $x > -3$ (3) $x < 1$ (4) $x < 1$ oder $x > -3$ (5) $x > 1$ oder $x < -3$.

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 091021:

Der Numerus des Zählers liegt zwischen 1000 und 10000, $\lg(1000) = 3$, $\lg(10000) = 4$. Der Zähler beträgt also 3.

Der Numerus des Nenners liegt zwischen 0,01 und 0,001, $\lg(0,01) = -2$, $\lg(0,001) = -3$. Der Nenner beträgt also -2.

Damit hat der Bruch den Wert von -1,5.

Aufgeschrieben und gelöst von Caban

Lösung 091022:

Angenommen $a_1, ..., a_4$ seien die vier Zahlen der gesuchten Art. Dann gelten für die nach Aufgabenstellung gebildeten Zahlen $d_1, ..., d_6$ die Gleichungen

$$d_4 = d_1 + d_2, \qquad d_5 = d_2 + d_3, \qquad d_6 = d_1 + d_2 + d_3$$

Nun sind höchstens folgende Fälle möglich:

I. d_1, d_2, d_3 sind ungerade Primzahlen. Dann ergibt sich der Widerspruch, dass d_4 und d_5 gerade und größer als 2, also keine Primzahlen sind. Daher scheidet der Fall aus.

II. d_1, d_2, d_3 sind gerade Primzahlen (also ist jede gleich 2(, dann ergibt sich derselbe Widerspruch.

III. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 ist genau eine gerade (also gleich 2). Dann ergibt sich der Widerspruch, dass d_6 gerade und größer als 2 ist.

IV. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 sind genau zwei gerade (also ist jede gleich 2).

a) unter diesen befindet sich d_2. Dann ergibt sich, dass entweder d_4 oder d_5 gerade und größer als 2 ist.

b) $d_1 = d_3 = 2$; d_2 ungerade Primzahl. Dann folgt $d_4 = d_5 = d_2 + 2$ und $d6 = d_2 + 4$. Nun ist von den drei ganzen Zahlen der Form $d_2, d_2 + 2, d_2 + 4$ stets eine durch 3 teilbar.

Die einzige Primzahl, die durch 3 teilbar ist, ist die 3. Da aber $d_2 > 1$ ist, also $d_2 + 2$ und $d_2 + 4$ größer als 3 sind, verbleibt nur die Möglichkeit $d_2 = 3$.

Hiernach folgt weiter

$$a_2 = a_1 + d_3 = a_1 + 2, \qquad a_3 = a_2 + d_2 = a_1 + 5, \qquad a_4 = a_3 + d_1 = a_1 + 7$$

Daher können $a_1, ..., a_4$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie von der Form

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = n + 2, \qquad a_3 = n + 5, \qquad a_4 = n + 7$$

mit einer natürlichen Zahl n sind.

Umgekehrt genügen je vier Zahlen der Form (*) in der Tat den Bedingungen der Aufgabe; denn für sie ist jede der Zahlen

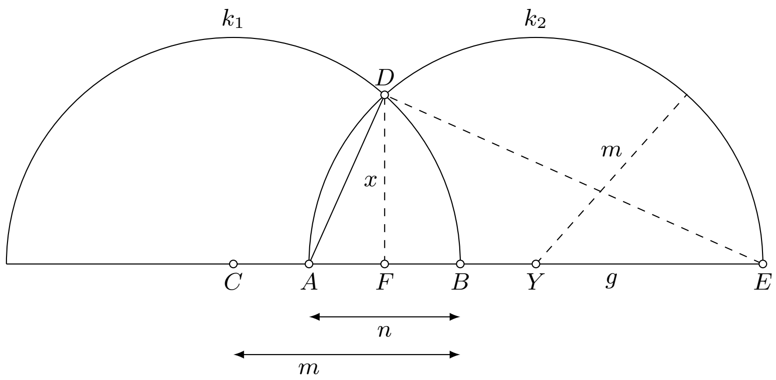
$$d_1 = a_4 - a_3 = 2, \qquad d_2 = a_3 - a_3 = 3, \qquad d_3 = a_2 - a_1 = 2$$
$$d_4 = a_4 - a_2 = 5, \qquad d_5 = a_3 - a_1 = 5, \qquad d_6 = a_4 - a_1 = 7$$

Primzahl.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 091023:

a) Verfährt man wie angegeben, so entsteht folgendes Bild:



b) Aus der Konstruktion folgt $AB = n$; $AY = DY = EY = m$. Ferner ist $AD = x = BD$.

Nach einem Satz der Elementargeometrie halbiert das von D auf g gefällte Lot die Strecke AB. Sein Fußpunkt sei F. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck $\triangle AED$ rechtwinklig. In ihm gilt nach dem Satz des Euklid (Kathetensatz):

$$x^2 = \frac{n}{2}(2m) = m \cdot n \qquad \text{also} \qquad x = \sqrt{m \cdot n}$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 091024:
Folgende Ungleichungen sind der gegebenen äquivalent

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &> 0 \\ (x+1)^2 &> 4 \\ (x+1)^2 - 2^2 &> 0 \\ (x-1)(x+3) &> 0 \end{aligned}$$

nach Fallunterscheidung erhält man als äquivalent mit der letzten Bedingung: $x > 1$ oder $x < -3$.

Damit ist gezeigt, dass von den Bedingungen (1) bis (5) nur die Bedingung (5) der gegebenen äquivalent ist.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission