9. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091011:

Bei einem international besetzten Radrennen ergab sich folgende Rennsituation.

Das Feld der Teilnehmer war in genau drei Gruppen (Spitzengruppe, Hauptfeld, letzte Gruppe) aufgesplittert. Jeder Fahrer fuhr in einer dieser Gruppen. Genau 14 Fahrer waren in der letzten Gruppe, darunter kein DDR-Fahrer. Genau 90 Prozent der übrigen Fahrer bildeten das Hauptfeld. Darin fuhren einige, jedoch nicht alle DDR-Fahrer. Die Spitzengruppe umfaßte genau ein Zwölftel des gesamten Teilnehmerfeldes. Von den dort vertretenen Mannschaften waren genau die polnischen am schwächsten und genau die sowjetischen am stärksten vertreten.

a) Wieviel Fahrer nahmen insgesamt teil?

b) Wieviel DDR-Fahrer waren in der Spitzengruppe?

c) Wieviel Mannschaften waren in der Spitzengruppe vertreten?

Aufgabe 091012:

In jedem von drei Betrieben I, II, III wurden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 produziert. Die Produktionskosten je Stück waren für gleichartige Erzeugnisse in allen drei Betrieben gleich. Aus nachstehender Tabelle sind die Stückzahlen der täglich produzierten Erzeugnisse sowie die täglichen Gesamtproduktionskosten zu ersehen.

Betrieb	Tägliche Stückzahlen			Tägliche Gesamtproduktionskosten in M
	E_1	E_2	E_3	
I	5	5	8	5 950
II	8	6	6	6 200
III	5	8	7	6 450

Wie hoch waren die Produktionskosten je Stück der einzelnen Erzeugnisarten?

Aufgabe 091013:

In einem regelmäßigen Sechseck mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, seien X, Y, Z die Mittelpunkte der Seiten AB, CD und EF.

Berechnen Sie das Verhältnis $I_S : I_D$, wenn I_S der Flächeninhalt des Sechsecks und I_D der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle XYZ$ ist.

Aufgabe 091014:

Es sei $f(x)$ die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ definierte Funktion und x_0 eine beliebige reelle Zahl.

Beweisen Sie, daß dann $f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6$ gilt!

(Dabei bezeichnet $f(x_0 - 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 - 1$ und $f(x_0 + 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 + 1$.)

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 091011:

Bezeichnungen :

x ist die Anzahl aller Fahrer,

s die Anzahl der Fahrer in der Spitzengruppe,

h die Anzahl der Fahrer des Hauptfeldes und

l die Anzahl der Fahrer der letzten Gruppe.

Die Indizes stehen für die entsprechenden Länder: s (sowjetisch), d (deutsch), p (polnisch).

Dann gelten folgende Beziehungen:

$$x = s + m + l \tag{1}$$
$$l = 14 \tag{2}$$
$$l_d = 0 \tag{3}$$
$$h = 0,9 \cdot (x - l) \tag{4}$$
$$h_d \neq 0 \tag{5}$$
$$s_d \neq 0 \tag{6}$$
$$s = \frac{1}{12}x \tag{7}$$
$$s_s > s_d > s_p \tag{8}$$

Aus (1), (2), (4) und (7) folgt dann: $x = \frac{1}{12}x + 0,9 \cdot (x - 14) + 14 \Rightarrow \frac{11}{12}x = 0,9x + 1,4 \Rightarrow x = 84$. Womit sich direkt $s = 7$ ergibt.

Aus (8) folgt, daß $s_s \geq 3$ und $s_p \geq 1$ (da $s_d \geq 2$). Nun gilt aber schon $s = 7 \geq s_s + s_d + s_p \geq 3 + 2 + 1 = 6$.

Gäbe es eine vierte Mannschaft im Spitzenfeld, so wäre sie also maximal mit einem Fahrer vertreten, was dem widerspricht, daß die polnische Mannschaft die wenigsten Fahrer (mindestens einen) hat. Also besteht das Spitzenfeld aus Fahrern von genau 3 Ländern.

Die Zahl 7 so in 3 Summanden aufzuteilen, daß der kleinste und größte Summand ungleich dem mittleren sind, geht einzig durch die Variante: $7 = 1 + 2 + 4$. Folglich gilt $s_d = 2$, also waren in der Spitzengruppe 2 deutsche Fahrer vertreten.

a) Es nahmen 84 Fahrer am Radrennen teil.

b) Davon waren 2 Fahrer in der Spitzengruppe.

c) In der Spitzengruppe fuhren Fahrer aus drei Mannschaften.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 091012:

Seien p_i die Produktionskosten für E_i, dann gilt

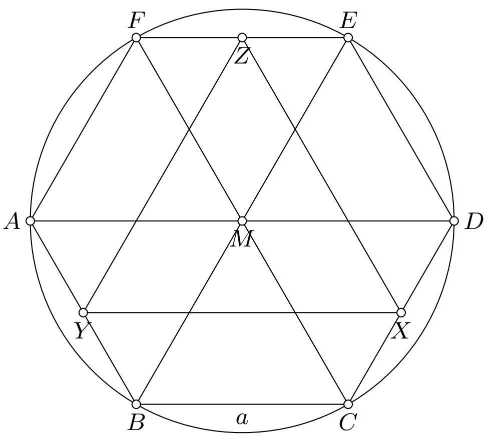
$$5p_1 + 5p_2 + 8p_3 = 5950 \tag{1}$$
$$8p_1 + 6p_2 + 6p_3 = 6200 \tag{2}$$
$$5p_1 + 8p_2 + 7p_3 = 6450 \tag{3}$$

Nun muss dieses lineare Gleichungssystem nur noch aufgelöst werden.

$$10p_2 + 34p_3 = 16600 \qquad \text{aus } 8 \cdot (1) - 5 \cdot (2) \tag{4}$$
$$3p_2 - p_3 = 500 \qquad \text{aus (3) - (1)} \tag{5}$$
$$112p_2 = 33600 \iff p_2 = 300 \qquad \text{aus } (4) + 34 \cdot (5)$$
$$p_3 = 400 \qquad \text{aus (5)}$$
$$p_1 = 250 \qquad \text{aus (1)}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Daniel Gutekunst

Lösung 091013:



Der Mittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks sei M, seine Seitenlänge a. Dann zerlegen die Strecken MA, MB, ..., MF das Sechseck in 6 gleichseitige Teildreiecke mit der Seitenlänge a. Der Flächeninhalt eines Teildreiecks sei I_T.

$$I_T = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \qquad \text{folgt} \qquad I_S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

Das Dreieck $\triangle XYZ$ ist gleichseitig, denn XY, YZ und XZ sind Mittellinien in den Trapezen $ABCD$, $CDEF$ und $ABEF$, diese Trapeze sind kongruent.

Dabei gilt $XY = \frac{a+2a}{2} = \frac{3}{2}a$ und somit

$$I_D = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}a\right)^2\sqrt{3} = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}$$

Daher ist

$$I_S : I_D = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} : \frac{9}{16}a^2\sqrt{3} = 8 : 3$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 091014:

Wegen

$$f(x_0-1) = 2(x_0-1)^2 - 3(x_0-1) + 4 = 2x_0^2 - 7x_0 + 9 \qquad \text{und}$$
$$f(x_0+1) = 2(x_0+1)^2 - 3(x_0+1) + 4 = 2x_0^2 + x_0 + 3 \qquad \text{gilt}$$
$$f(x_0-1) = f(x_0+1) - 8x_0 + 6 \quad \square$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission