9. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090931:

Es sei $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck. Man denke sich alle Dreiecke gebildet, deren Ecken je drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind. Jemand will nun einige dieser Dreiecke aufschreiben, und zwar so, daß keine zwei der aufgeschriebenen Dreiecke einander kongruent sind.

Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die er unter dieser Bedingung aufschreiben kann!

Aufgabe 090932:

Konstruieren Sie ein Dreieck ΔABC aus $s_a = 9,6$ cm, $s_b = 12,6$ cm und $s_c = 11,1$ cm! Dabei sind s_a, s_b und s_c die Längen der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.

Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Aufgabe 090933:

Für eine bestimmte Arbeit benötigt A genau m-mal so lange Zeit wie B und C zusammen; B benötigt genau n-mal so lange wie C und A zusammen und C genau p-mal so lange wie A und B zusammen.

Berechnen Sie p in Abhängigkeit von m und n!

Aufgabe 090934:

Man beweise:

Wenn zwei ganze Zahlen a und b die Bedingung erfüllen, daß die Zahl $11a + 2b$ durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl $18a + 5b$ durch 19 teilbar.

Aufgabe 090935:

Die Fläche des Dreiecks ΔABC werde durch eine Parallele zur Seite AB in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem die zur Seite AB gehörende Höhe des Dreiecks durch die Parallele geteilt wird!

Aufgabe 090936:

Es sei $f(x)$ die für alle reellen x definierte Funktion $f(x) = \frac{(x-1)\,x}{2}$.

Ferner sei x_0 eine beliebig gegebene, von 0 verschiedene reelle Zahl. Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion $f(x)$ an den Stellen $x_0 + 1$ und $x_0 + 2$ mit $f(x_0 + 1)$ bzw. $f(x_0 + 2)$ bezeichnet.

Man beweise, daß dann

$$f(x_0 + 2) = \frac{(x_0 + 2)\,f(x_0 + 1)}{x_0} \quad \text{gilt.}$$

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090931:

Es gibt nur fünf verschiedene Sorten von Dreiecken, d.h. jedes mögliche Dreieck gehört zu genau einer dieser Sorten.

Begründung: Für ein Dreieck mit den Ecken $X, Y, Z \in \{A, ..., H\}$ seien x, y und z die Abstände zwischen jeweils zwei Ecken. (Bei dem Dreieck mit den Ecken B, C, H wäre etwa $x = 1, y = 5, z = 2$.)

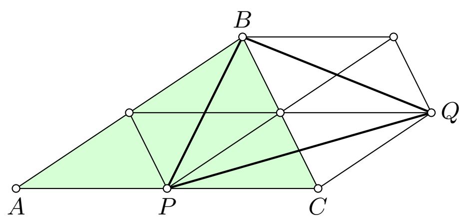
Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn die Tripel der zugehörigen Abstände gleich sind. Dabei spielt es aber keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Abstände stehen. (Etwa für das Dreieck E, G, D ist $x = 2, y = 5, z = 1$, und die Dreiecke E, G, D und B, C, H sind kongruent.)

Die Summe $x + y + z$ ist stets gleich 8. Folglich ist die Fragestellung dazu äquivalent, auf wie viele Weisen sich 8 als Summe dreier natürlicher Zahlen darstellen lässt, wobei die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt.

Hierfür gibt es nur die fünf Möglichkeiten $1 + 1 + 6 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3$

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 090932:



Die Seitenmittelpunkte unterteilen das Dreieck ABC in 4 kongruente Teildreiecke. Durch hinzufügen weiterer Kopien erhalten wir das Dreieck BPQ, dessen Seiten gerade die Längen s_a, s_b, s_c haben - dieses ist an geeigneten Parallelogrammen einsehbar.

BPQ kann wie üblich konstruiert werden. Die Seitenhalbierenden des Dreiecks BPQ sind parallel zu den Seiten des gesuchten Dreiecks ABC. Daher erhalten wir dieses mittels parallele Geraden durch B und P. Insbesondere ist das Dreieck konstruierbar, falls s_a, s_b, s_c die Dreieckungleichungen erfüllen.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 090933:
Wir betrachten die Leistungen a, b und c von A, B und C. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$a = \frac{1}{m}(b+c); \qquad b = \frac{1}{n}(a+c); \qquad c = \frac{1}{p}(a+b)$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $c = am-b$, die zweite zu $c = bn-a$. Insbesondere ist also $am-b = bn-a$ bzw. $(m+1)a = (n+1)b$, also

$$b = \frac{m+1}{n+1} \cdot a \qquad \text{und} \qquad c = am - b = \frac{mn-1}{n+1} \cdot a$$

Ist $mn-1 = 0$, also $c = 0$, dann leistet C keine Arbeit und also ist p nicht definiert. Andernfalls können wir im Folgenden durch $c \neq 0$ dividieren.

Mit der dritten Gleichung erhalten wir schließlich durch Einsetzen

$$p = \frac{a+b}{c} = \frac{\frac{n+1+m+1}{n+1} \cdot a}{\frac{mn-1}{n+1} \cdot a} = \frac{m+n+2}{mn-1}$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 090934:
Mit $11a + 2b$ ist auch

$$12 \cdot (11a+2b) - 19 \cdot (6a+b) = 132a + 24b - 114a - 19b = 18a + 5b$$

durch 19 teilbar.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 090935:
Es seien P und Q die Schnittpunkte der Parallelen mit den Seiten AC bzw. BC. Darüber hinaus seien h_{AB} und h_{PQ} die Längen der Höhen des Punktes C auf AB bzw. die Parallele PQ.

Nach Aufgabenstellung ist der Flächeninhalt A_{PQC} des Dreiecks $\triangle PQC$ genau halb so groß wie der Flächeninhalt A_{ABC} des Dreiecks $\triangle ABC$.

Also ist

$$\frac{1}{2}|PQ| \cdot h_{PQ} = A_{PQC} = \frac{1}{2}A_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot |AB| \cdot h_{AB}$$

bzw.

$$2 = \frac{|AB|}{|PQ|} \cdot \frac{h_{AB}}{h_{PQ}}$$

Nach den Strahlensätzen ist $\frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{h_{AB}}{h_{PQ}}$, also $h_{AB} = \sqrt{2} \cdot h_{PQ}$. Damit wird die Höhe h_{AB} im Verhältnis $1 : (\sqrt{2}-1)$ durch die Parallele PQ zu AB geteilt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 090936:
Es ist

$$\frac{(x_0+2)f(x_0+1)}{x_0} = \frac{(x_0+2) \cdot \frac{x_0(x_0+1)}{2}}{x_0} = \frac{(x_0+2)(x_0+1)}{2} = f(x_0+2)$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix