9. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090921:
Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:

Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, daß sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, daß jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die "Wahren", weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten. Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die "Unwahren", weil sie jede Frage falsch beantworten. Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die "Unbeständigen", weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiß, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet.

Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen. Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppe beziehen, feststellen, ob der Schüler ein "Wahrer", ein "Unwahrer" oder ein "Unbeständiger" ist.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?

b) Geben Sie eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln!

Aufgabe 090922:
Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a_1 und dem Volumen V_1 sowie ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a_2 und dem Volumen V_2. Für die Kantenlängen gelte $a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2}$.

Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2$!

Aufgabe 090923:
Jemand hat sieben Kärtchen mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7.

Man zeige, daß sich unter allen denjenigen siebenstelligen Zahlen, die unter Verwendung jeweils genau dieser sieben Kärtchen gelegt werden können (wobei ein z.B. durch Umdrehen bewirktes "Verwandeln" der 6 in eine 9 verboten ist), keine zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist!

Aufgabe 090924:
Es ist zu beweisen:

Verbindet man in einem Parallelogramm $ABCD$ den Eckpunkt C mit den Mittelpunkten der Seiten AB und AD, so teilen diese Verbindungsstrecken die Diagonale BD in drei gleich lange Teilstrecken.

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090921:

a) Eine Frage genügt nicht, da damit nur zwei Fälle (”ja” - vs. ”nein” -Antwort) unterschieden werden können, es aber drei Gruppen gibt. Dass es mit zwei Fragen geht, zeigt Teil b).

b) Man stelle zweimal die gleiche Frage ”Bist du ein *Unbeständiger*?”.

   Ein ”Wahrer” wird darauf zweimal mit ”nein” antworten, ein ”Unwahrer” zwei mal mit ”ja” und ein ”Unbeständiger” einmal mit ”ja” und einmal mit ”nein” (in irgendeiner Reihenfolge).

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 090922:
Es ist

$$V_1 = a_1^3 \qquad \text{und} \qquad V_2 = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot a_2^3 = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}a_1)^3 = \frac{1}{3}a_1^3 = \frac{1}{3}V_1$$

sodass das Verhältnis $V_1 : V_2$ genau $3 : 1$ beträgt.

Bemerkung:

Das Volumen V eines regulären Tetraeders mit Kantenlänge a ergibt sich (wie für jede Pyramide) zu $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$, wobei A_G der Flächeninhalt der Grundfläche und h die Länge der zugehörigen Höhe ist. Als Grundfläche ergibt sich ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge a. Dessen Fläche lässt sich (wie in jedem Dreieck) via $A_G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_g$ berechnen, wobei h_g die Länge einer Höhe im Dreieck ist.

Da die Höhen im gleichseitigen Dreieck mit den Seitenhalbierenden zusammenfallen, teilt eine solche das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinklige, wobei eine der Katheten eines solchen Dreiecks die Höhe h_g, die zweite eine halbe Grundseite und die Hypotenuse die ungeteilte Dreiecksseite ist.

Es ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras $h_g^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$, also $h_g = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ und damit $A_G = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Für die Höhe im regulären Tetraeder beachte man, dass sie mit der entsprechenden Schwerelinie (Verbindung eines Eckpunkts mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) zusammenfällt. So ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit "Spitze des Tetraeders", "Schwerpunkt der Grundfläche" und einem Eckpunkt der Grundfläche als Eckpunkte.
Dessen Hypotenuse ist eine Kante des regulären Tetraeders, eine Kathete die Höhe h und die zweite Kathete der Abschnitt der Seitenhalbierenden in der Grundfläche zwischen Schwerpunkt und Eckpunkt.

Da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$ teilt, wobei der Abschnitt zwischen Eckpunkt und Schwerpunkt der längere ist, und da im gleichseitigen Dreieck die Höhen und Seitenhalbierenden zusammenfallen, ist dieser Abschnitt hier also $\frac{2}{3} \cdot h_g = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ lang.

Es ergibt sich für das betrachtete rechtwinklige Dreieck zwischen Spitze, Schwerpunkt und Eckpunkt nach dem Satz von Pythagoras nun also $h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = a^2$, also $h^2 + \frac{3}{9}a^2 = a^2$ bzw. $h = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}a$.

Zusammen mit der zuvor berechneten Grundfläche ergibt sich nun

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{3\cdot 4}a^3$$

was wir oben verwendet haben.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 090923:

Wir nehmen indirekt an, es gäbe zwei solche Zahlen $a > b$, die sich so bilden lassen und für die a Vielfaches von b ist. Dann gäbe es eine natürliche Zahl $n > 1$ mit $a = n \cdot b$.

Da a und b aus den gleichen Ziffern gebildet werden, besitzen sie die gleiche Quersumme $1+2+\cdots+7 = 28$, lassen also wegen $28 - 3 \cdot 9 = 1$ jeweils den Rest 1 bei der Division durch 9.

Demnach muss auch n den Rest 1 bei der Teilung durch 9 lassen, damit dies auch für das Produkt $a = b \cdot n$ gilt. Also ist $n \geq 10$, sodass a mindestens eine Stelle mehr besitzen müsste als b, was ein Widerspruch ist.

Kurz: $a \equiv b \equiv 28 \equiv 1 \pmod 9$, also auch $n \equiv b \cdot n = a \equiv 1 \pmod 9$ und damit $n \geq 10$, Widerspruch.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 090924:

Sei mit S der Diagonalenschnittpunkt des Parallelogramms, M der Mittelpunkt von AB und N der von AD bezeichnet.

Die Diagonalen AC und BD halbieren sich gegenseitig. Also ist BS Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ABC$, genauso wie CM. Damit schneiden diese sich im Schwerpunkt S_B des Dreiecks, sodass $|BS_B| = \frac{2}{3}|SB| = \frac{1}{3}|DB|$ gilt, da der Schwerpunkt eines Dreiecks jede seiner Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilt.

Analog ist DS Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ACD$, genauso wie CN. Damit schneiden sich diese beiden Geraden im Schwerpunkt S_D des Dreiecks, sodass wieder $|DS_D| = \frac{2}{3}|DS| = \frac{1}{3}|DB|$ gilt. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix