9. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090831:

Die Altersangaben (in vollen Lebensjahren ausgedrückt) einer Familie - Vater, Mutter und ihre zwei Kinder - haben folgende Eigenschaften:

Das Produkt aller vier Lebensalter beträgt 44 950; der Vater ist 2 Jahre älter als die Mutter.

Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

Aufgabe 090832:

Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ΔABC seien ähnliche Vielecke V_a, V_b, V_c konstruiert, und zwar so, daß die Dreiecksseiten BC, AC, AB jeweils einander entsprechende Seiten von V_a, V_b bzw. V_c sind.

Beweise: Der Flächeninhalt des Vielecks über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Vielecke über den Katheten.

Aufgabe 090833:

Beweise die Richtigkeit der folgenden Teilbarkeitsregel:

Eine drei- oder mehrstellige natürliche Zahl ist stets dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl, vermehrt um die Hälfte der Anzahl der Einer, eine durch 4 teilbare ganze Zahl ist.

Beispiel: 37 528 ist zu untersuchen. $52 + 4 = 56$ ist durch 4 teilbar, also ist 37 528 durch 8 teilbar.

Aufgabe 090834:

Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 vier konzentrische Kreise, für deren Radien r_1, r_2, r_3 und r_4

$$r_4 - r_3 = r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = r_1 \qquad \text{gilt.}$$

Ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts von K_1 zu den Flächeninhalten der drei von K_1 und K_2 bzw. K_2 und K_3 bzw. K_3 und K_4 gebildeten Kreisringe!

Aufgabe 090835:

Aus 77prozentigem und 87prozentigem Spiritus und nur daraus soll durch Mischen genau 1 000 g 80prozentiger Spiritus hergestellt werden.

Ermittle die dafür genau benötigten Massen!

Die Prozentangaben beziehen sich auf die Massen.

Aufgabe 090836:

Im ebenen Gelände seien genau alle diejenigen Punkte zugänglich, die auf einem Rechteck $ABCD$ einschließlich seines Inneren gelegen sind. In dieser Rechteckfläche führe ein Kreisbogen von A nach B, dessen zugehöriger Mittelpunkt nicht zugänglich sei. Auf dem Kreisbogen liege der Punkt P (mit $P \neq A$ und $P \neq B$).

Konstruiere die Tangente in P an den Kreisbogen, ohne daß bei Durchführung des Konstruktion das Rechteck $ABCD$ verlassen wird!

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090831:

Die Zerlegung von 44 950 in Primfaktoren lautet $44\,950 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31$. Daher gibt es genau die folgenden Möglichkeiten, 44 950 in ein Produkt aus genau 4 natürlichen Zahlen zu zerlegen:

$$\begin{array}{ll}
(1) & (2 \cdot 5) \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31 = 10 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31, \\
(2) & (2 \cdot 29) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 31 = 58 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 31, \\
(3) & (2 \cdot 31) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29 = 62 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29, \\
(4) & (5 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 29 \cdot 31 = 25 \cdot 2 \cdot 29 \cdot 31, \\
(5) & (5 \cdot 29) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 31 = 145 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 31, \\
(6) & (5 \cdot 31) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 29 = 155 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 29, \\
(7) & (29 \cdot 31) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 899 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5
\end{array}$$

Da die Altersdifferenz der beiden Eltern 2 Jahre beträgt, können höchstens die Fälle (1) und (4) Lösung sein. Von ihnen ist der Fall (4) nicht real; denn nach ihm müsste die 29jährige Mutter ein 25jähriges Kind haben.

Somit verbleibt nur Möglichkeit (1); d.h., die gesuchten Altersangaben können nur 31, 29, 10, 5 sein. Umgekehrt erfüllen diese Angaben auch tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 090832:

Wie üblich sei $BC = a, AC = b, AB = c$ gesetzt, AB sei die Hypotenuse von $\triangle ABC$.

Die Flächeninhalte von V_a, V_b, V_c seien F_a, F_b bzw. F_c genannt. Da nun BC und AB in den ähnlichen Vielecken V_a, V_c einander entsprechende Seiten sind, gilt

$$F_a : F_c = a^2 : c^2, \qquad \text{also} \qquad F_a = \frac{a^2}{c^2} F_c$$

Ebenso erhält man $F_b = \frac{b^2}{c^2} F_c$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Durch Multiplikation mit $\frac{F_c}{c^2}$ folgt hieraus

$$\frac{a^2}{c^2} \cdot F_c + \frac{b^2}{c^2} \cdot F_c = F_c \quad \text{d.h.} \quad F_a + F_b = F_c, \qquad \square$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 090833:

Sind a, b, c die Einer-, Zehner- bzw. Hunderterziffer einer natürlichen Zahl n, so lässt sich diese in der Form

$$n = 1000d + 100c + 10b + a$$

mit einer ganzen Zahl d darstellen. Vermehrt man dann die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl um die Hälfte der Anzahl der Einer, so ergibt sich die Zahl

$$m = 10c + b + \frac{1}{2}a$$

Ist nun voraussetzungsgemäß m durch 4 teilbar, so ist $10c + b + \frac{1}{2}a = 4k$ mit einer ganzen Zahl k. Daraus folgt $20c + 2b + a = 8k$, also ist dann

$$n = 8k + 1000d + 80c + 8b = 8(k + 125d + 10c + b)$$

durch 8 teilbar, $\square$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 090834:

Aus den Gleichungen für die Radien folgt $r_2 = 2r_1, r_3 = 3r_1, r_4 = 4r_1$.

Der Flächeninhalt A_1 des inneren Kreises K_1 beträgt

$$A_1 = \pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_2 des ersten Kreisringes beträgt

$$A_2 = \pi\left[(2r_1)^2 - r_1^2\right] = 3\pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_3 des zweiten Kreisringes beträgt

$$A_3 = \pi\left[(3r_1)^2 - (2r_1)^2\right] = 5\pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_4 des dritten Kreisringes beträgt

$$A_3 = \pi\left[(4r_1)^2 - (3r_1)^2\right] = 7\pi r_1^2$$

Daraus folgt:

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = \pi r_1^2 : 3\pi r_1^2 : 5\pi r_1^2 : 7\pi r_1^2 = 1 : 3 : 5 : 7$$

Die vier Flächeninhalte verhalten sich zueinander wie 1 : 3 : 5: 7.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 090835:

Wenn es eine Lösung der Aufgabe gibt, dann sei für diese x die Maßzahl der Masse des 77prozentigen Spiritus. Dann ist $(1000 - x)$ die Maßzahl der Masse des 87prozentigen Spiritus, und es gilt:

$$\frac{77}{100}x + \frac{87}{100}(1000 - x) = \frac{80}{100} \cdot 1000$$

also $77x + 87000 - 87x = 80000$, woraus man $x = 700$ erhält.

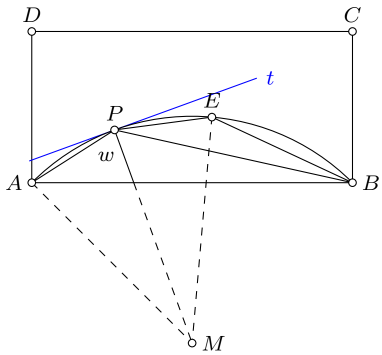
Folglich kommen als Lösung der Aufgabe nur die Massen 700 g 77-prozentiger und 300 g 87prozentiger Spiritus in Frage.

Diese Massen haben tatsächlich die geforderte Eigenschaft; denn 700 g von 77prozentigem Spiritus enthalten genau 539 g reinen Spiritus; 300 g von 87prozentigem Spiritus enthalten genau 261 g reinen Spiritus. Das sind zusammen 800 g reiner Spiritus.

Laut Definition bezeichnet man 1000 g einer Mischung, die 800 g Spiritus und 200 g Wasser enthält, als 80prozentigen Spiritus, der laut Aufgabe herzustellen war.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 090836:
Es sei o.B.d.A. $AP \leq BP$. Der Kreis um P mit dem Radius PA schneidet den gegebenen Kreis außer in A in E.



Wegen $AP \leq BP$ ist E zugänglich, ebenso ein Stück der Winkelhalbierenden w des Winkels $\sphericalangle APE$.

Behauptung: Die Senkrechte t durch P auf w ist die gesuchte Tangente.

Beweis: Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so ist $\triangle AMP \cong \triangle UMP$ (sss), also $\sphericalangle APM \cong \sphericalangle EPM$; daher liegt M auf w. Die gesuchte Tangente steht somit senkrecht auf w; sie fällt also mit der konstruierten Geraden t zusammen.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission