9. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090821:

Klaus und Horst spielen mit Würfeln. Sie benutzen bei jedem Wurf genau zwei verschieden große Würfel und addieren jedesmal die beiden Augenzahlen.

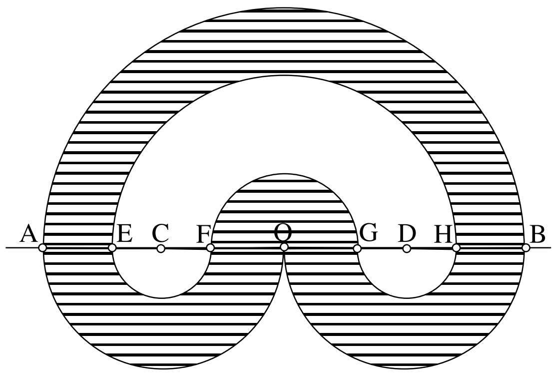
Klaus meint, daß unter allen möglichen verschiedenen Würfen solche mit der Summe 7 am häufigsten auftreten. Zwei Würfe heißen dabei genau dann gleich, wenn die Augenzahlen gleich großer Würfel jeweils übereinstimmen.

Begründe die Richtigkeit dieser Meinung!

Aufgabe 090822:

Auf einer Geraden seien die Punkte A, E, C, F, O, G, D, H, B in dieser Reihenfolge so gelegen, daß gilt:

$$\overline{AB} = 6\text{ cm}$$
$$\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FO} = \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{HB} = 1\text{ cm};$$
$$\overline{EC} = \overline{CF} = \overline{GD} = \overline{DH} = 0,5\text{ cm}.$$



Über den Strecken AB, EH und FG seien Halbkreise in die eine Halbebene und über den Strecken AO, OB, EF und GH Halbkreise in die andere Halbebene bezüglich der Geraden durch A und B gezeichnet.

Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche!

Aufgabe 090823:

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr!

Aufgabe 090824:

Beweise folgenden Satz:

> In jedem Dreieck ΔABC teilt jede Halbierende eines Innenwinkels dessen Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090821:

Ordnet man z.B. die möglichen Würfe und die zugehörigen Summen der jeweiligen beiden Augenzahlen in Form nachstehender Tabelle an, so erkennt man, dass in der Tat die Summe 7 am häufigsten auftritt. (waagerecht ... großer Würfel, senkrecht ... kleiner Würfel):

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	**7**
2	3	4	5	6	**7**	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	5	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 090822:

Der gesuchte Flächeninhalt A ist gleich der Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über AB, FG, AO und OB vermindert um die Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über EH, EF und GH.

Wegen $AB = 6$ cm, $FG = 2$ cm, $AO = OB = 3$ cm, $EH = 4$ cm, $EF = GH = 1$ cm gilt daher:

$$A = \frac{\pi}{8}(36 + 4 + 9 + 9 - 16 - 1 - 1)cm^2 = 5\pi cm^2$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt 5π cm^2, das sind angenähert 15,71 cm^2.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 090823:

(I) Im Zeitraum von je einem Übereinanderstehen der beiden Zeiger bis zum nächsten nimmt der Winkel zwischen den Zeigern (gemessen im Uhrzeigersinn vom Stundenzeiger bis zum Minutenzeiger) alle Werte von 0° bis 360° an, jeden genau einmal. Unter diesen Zeigerstellungen befinden sich genau zwei der gesuchten, nämlich die mit den Winkeln 90° und 270°.

(II) In der Zeit von 0 Uhr bis 12 Uhr führt der Minutenzeiger genau 12 volle Umdrehungen aus, der Stundenzeiger genau eine in gleicher Richtung.

Daher wird dieser Zeitraum durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens der beiden Zeiger in 11 Teile geteilt (und zwar wegen der Gleichförmigkeit der Bewegungen in gleichlange).

(III) Aus (I) und (II) folgt zunächst: Die Zeit von 0 Uhr bis 24 Uhr wird durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens in 22 Teile geteilt, und in jedem dieser Teilzeiträume befinden sich genau 2 gesuchte Zeitpunkte.

Deren Gesamtzahl beträgt somit 44.

(IV) Aus (I), (II) und der Gleichförmigkeit der Bewegungen folgt ferner: Der Zeitraum von 0 Uhr bis 12 Uhr wird, durch diejenigen Zeitpunkte, die den Winkeln $0°, 90°, 180°, 270°$ entsprechen, in 44 gleichlange Teile geteilt.

Diese Zeitpunkte ergeben sich somit als die ersten 43 positiven ganzzahligen Vielfachen von $\frac{12}{44}$ h $= \frac{3}{11}$ h.

Die Zeitpunkte mit den Winkeln 90° und 270° sind dabei die ungeradzahligen unter diesen Vielfachen. Von diesen liegen zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr genau diejenigen $n \cdot \frac{3}{11}$ h (n ungerade), bei denen n die Ungleichung $4 < n \cdot \frac{3}{11} < 5$ oder gleichbedeutend $\frac{44}{3} < n < \frac{55}{3}$ erfüllt, das sind die Zeitpunkte

$$15 \cdot \frac{11}{3}\text{h} = 4h\ 5\frac{5}{11}\text{min}$$
$$17 \cdot \frac{11}{3}\text{h} = 4h\ 38\frac{2}{11}\text{min}$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 090824:

$Voraussetzung:$ Dreieck mit Winkelhalbierender

Behauptung : Winkelhalbierende teilt gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anderen Seiten

Beweis : O.B.d.A. werde die Winkelhalbierende in C betrachtet, damit gilt $\gamma_1 = \gamma_2$ (1). Zu zeigen bleibt hier $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$.

Der Sinus von zwei sich zu 180^o ergänzenden Winkeln (Nebenwinkel) ist gleich groß. Deshalb gilt: $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$ (2)

Wegen dem Sinussatz gilt: $\sin \alpha : \sin \gamma = a : c$. Daher gilt nun ebenfalls: $\sin \alpha_1 : \sin \gamma_1 = a_1 : c_1$ (3) und $\sin \alpha_2 : \sin \gamma_2 = a_2 : c_2$ (4).

Mit (3), (4), (1) und (2) gilt: $a_1 : a_2 = (\sin \alpha_1 \cdot \sin \gamma_2 \cdot c_1) : (\sin \gamma_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot c_2) = c_1 : c_2$ □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission