9. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

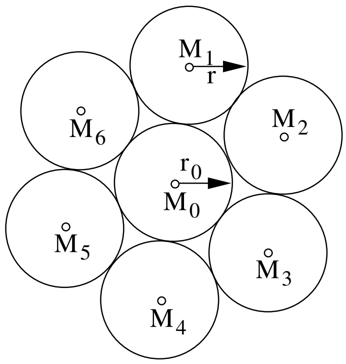
Aufgabe 090811:

Untersuche, ob es Vielecke mit einer der folgenden Eigenschaften gibt:

a) Die Anzahl der Diagonalen ist dreimal so groß wie die Anzahl der Eckpunkte.

b) Die Anzahl der Eckpunkte ist dreimal so groß wie die Anzahl der Diagonalen.

Aufgabe 090812:



Gegeben seien in der Ebene ein Kreis k_0 und 6 Kreise vom Radius r, deren jeder in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise genau zwei von ihnen und außerdem den Kreis k_0 von außen berührt.

Ermittle den Radius r_0 des Kreises k_0!

Aufgabe 090813:

a) Beweise folgenden Satz:

Wenn in einem (nicht überschlagenen) ebenen Viereck alle Seiten gleichlang sind (Rhombus), dann stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

b) Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

Aufgabe 090814:

Auf zwei nebeneinanderliegenden Fahrbahnen sind zwei 4 m lange Kraftwagen in gleicher Fahrtrichtung gefahren. Der erste hatte eine Geschwindigkeit von 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der zweite eine Geschwindigkeit von 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der zweite Kraftwagen fuhr an dem ersten vorbei.

Zu Beginn des betrachteten Vorganges befand sich die Hinterkante des ersten Wagens $a = 20$ m vor der Vorderkante des zweiten (siehe Abbildung a); am Ende des Vorganges die Vorderkante des ersten $a = 20$ m hinter der Hinterkante des zweiten (siehe Abbildung b).

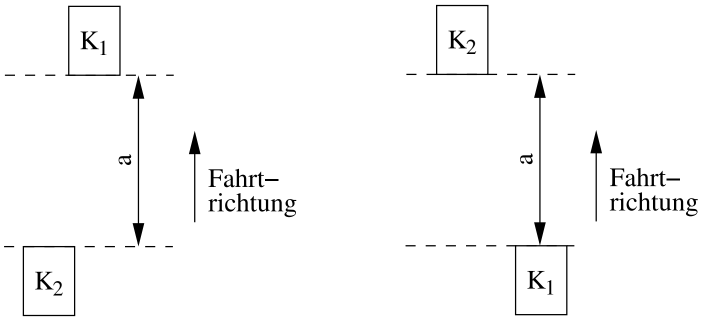


Abbildung a) Abbildung b)

Wie lange dauerte dieser Vorgang, und welche Fahrtstrecke wurde von der Vorderkante des zweiten Wagens dabei zurückgelegt?

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090811:

Die Formel für die Anzahl z der Diagonalen in einem konvexen n-Eck lautet: $z = \frac{n(n-3)}{2}$.

Begründung: Von jedem Eckpunkt geht je eine Diagonale zu denjenigen Eckpunkten, die von dem genannten Eckpunkt verschieden und auch nicht zu ihm benachbart sind. Daher gehen von jedem Eckpunkt genau $(n-3)$ Diagonalen aus.

Addiert man diese für alle n Eckpunkte gebildeten Anzahlen, so hat man jede Diagonale des n-Ecks genau 2 mal gezählt. Daher gilt $2z = n(n-3)$, woraus die behauptete Formel folgt.

a) Angenommen, es gibt ein n-Eck der genannten Art. Dann gilt:

$$z = 3n \to 3n = \frac{n(n-3)}{2} \to 9n = n^2$$

Daraus folgt wegen $n \neq 0$: $n = 9$.

Umgekehrt: Für $n = 9$ ergibt sich $z = 27 = 3n$. Also haben alle 9ecke und nur diese die Eigenschaft a).

b) Angenommen, es gibt ein n-Eck der genannten Art. Dann gilt:

$$z = \frac{n}{3} \to \frac{n}{3} = \frac{n(n-3)}{2} \to 11n = 3n^2$$

Es gibt also kein n-Eck mit der Eigenschaft b), weil die letzte Bedingung für keine positive ganze Zahl n erfüllbar ist.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 090812:

Angenommen, M_0 sei der Mittelpunkt und r der Radius eines Kreises k_0, zu dem 6 Kreise der gesuchten Art existieren; deren Mittelpunkte seien $M_1, M_2, ..., M_6$. Dann entstehen 6 kongruente gleichschenklige Dreiecke

$$\Delta M_1M_0M_2, \quad \Delta M_2M_0M_3, \quad ... \quad \Delta M_6M_0M_1 \qquad (1)$$

also wird $\angle M_1M_0M_2 \cong \angle M_2M_0M_3 \cong ... \cong \angle M_6M_0M_1$, und da die Summe dieser Winkel $360°$ beträgt, hat jeder von ihnen eine Größe von $60°$. Die Dreiecke (1) sind somit gleichseitig, und es folgt $r_0 + r = 2r$, also $r_0 = r$.

Umgekehrt sind für $r_0 = r$ die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Denn wählt man $M_0, M_1, ..., M_6$

so, dass $\Delta M_1M_0M_2$, $\Delta M_2M_0M_3$, ... $\Delta M_5M_0M_6$ gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $2r$ sind, so wird $\Delta M_6M_0M_1$ gleichschenklig, mit $\angle M_6M_0M_1 = 360° - 5 \cdot 60°$, also ebenfalls gleichseitig.

Daher berühren sich die Kreise um $M_0, M_1, ..., M_6$ mit dem Radius r in der vorgeschriebenen Weise.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 090813:

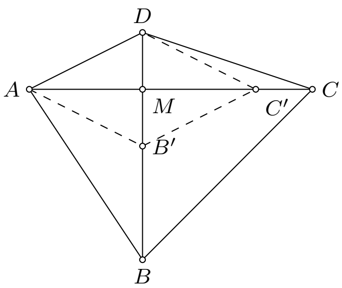
a) *Voraussetzung:* $ABCD$ sei ein ebenes Viereck mit $AB = BC = CD = DA$.

Behauptung: $AC \perp DB$.

Beweis: Wegen $AB = CB$ liegt B auf der Mittelsenkrechten von AC, wegen $AD = CD$ ebenso auch D. Daher ist die Gerade durch B und D die Mittelsenkrechte von AC, insbesondere gilt also $BD \perp AC$.

b) Die formale Umkehrung lautet: Wenn in einem Viereck die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, dann sind alle Seiten gleichlang (Rhombus).

Die formale Umkehrung ist kein (wahrer) Lehrsatz, wie z.B. das folgendermaßen gebildete Viereck $ABCD$ zeigt (siehe Abbildung).



Es sei $AB'C'D$ ein Rhombus mit dem Mittelpunkt M. Ferner sei B ein von B' verschiedener Punkt auf dem von M durch B' gehenden Strahl. Schließlich sei C irgendein Punkt auf dem von M durch C' gehenden Strahl.

Dann ist $ABCD$ ein Viereck, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen; aber es gilt $AB \neq AD$.

Denn wäre $AB = AD$, so folgte $\triangle ABM \cong \triangle ADM$ (ssw mit rechtem, also der größten Seite gegenüberliegendem Winkel), also $MB = MD = MB'$ im Widerspruch zu $B \neq B'$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 090814:

Da der Vorgang laut Aufgabe stattgefunden hat, existiert eine Lösung. Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

Geschwindigkeit von K_1 bzw. K_2: $v_1 = 60\frac{km}{h}$, $v_2 = 70\frac{km}{h}$

Weg der Vorderkante von K_1 bzw. K_2 während des Vorgangs: s_1, s_2

Zeitdauer des Vorgangs: t

Abstand der Vorderkanten voneinander zu Anfang bzw. am Ende des Vorgangs: $d_A = d_E = 24$ m

Summe dieser Abstände: $D = d_A + d_E = 48$ m

Angenommen nun, diese Größen seien die bei dem Vorgang der Aufgabenstellung auftretenden. Dann folgt

$$s_1 = v_1 t \tag{1}$$
$$s_2 = v_2 t \tag{2}$$
$$s_1 + D = s_2 \tag{3}$$

Daraus folgt weiter $v_1 t + D = v_2 t$, also

$$t = \frac{D}{v_2 - v_1} = \frac{0,048}{10} h = 17,28 sec \approx 17,3 sec$$

sowie

$$s_2 = v_2 t \left(= \frac{v_2 D}{v_2 - v_1} \right) = 336 m$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission