8. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081041:

a) Beweisen Sie, daß für jedes Dreieck folgender Satz gilt!

Das Produkt der Längen a und b zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkt aus der Länge h der der dritten Dreiecksseite zugeordneten Höhe und der Länge d des Umkreisdurchmessers dieses Dreiecks.

b) Folgern Sie aus diesem Satz die Beziehung $F = \frac{abc}{2d}$, wobei F der Flächeninhalt des Dreiecks und c die Länge der dritten Dreiecksseite sind!

Aufgabe 081042:

Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a \neq b$ und $ab > 0$. Man untersuche, ob für

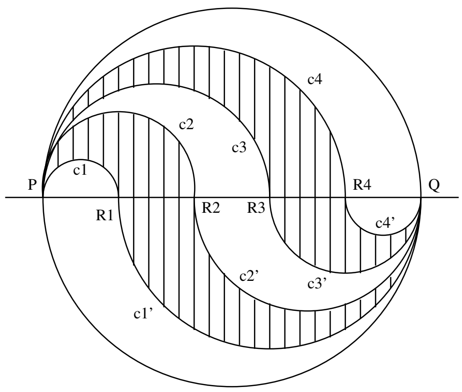
$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad \text{der Ausdruck } s = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \quad \text{existiert!}$$

Ist dies der Fall, so drücke man s weitgehend vereinfacht durch a und b aus, in diesem Falle rational!

Aufgabe 081043:

In einer Ebene ε sei k ein Kreis mit gegebenem Radius r; ferner sei eine natürliche Zahl $n \geqslant 2$ gegeben. Ein Durchmesser $\overline{PQ}$ von k werde in n gleiche Teile geteilt; die Teilpunkte seien $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$, so daß

$$\overline{PR_1} = \overline{R_1R_2} = \cdots = \overline{R_{n-2}R_{n-1}} = \overline{R_{n-1}Q} \text{ gilt.}$$



Eine der beiden Halbebenen, in die ε durch die Gerade g_{PQ} zerlegt wird, sei H genannt, die andere H'. Dann sei c_i der in H gelegene Halbkreis über PR_i, ferner c_i' der in H' gelegene Halbkreis über R_iQ, sowie schließlich b_i die aus c_i und c_i' zusammengesetzte Kurve ($i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$).

Man berechne die Inhalte der Flächenstücke, in die die Kreisfläche durch je zwei benachbarte Kurven $b_1, \ldots, b_{n-1}$ bzw. durch b_1 bzw. b_{n-1} und den jeweiligen Halbkreis zerlegt wird!

Aufgabe 081044:

Im Innern eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien 288 Punkte gelegen. Es soll eine Anzahl von Parallelen zu AB derart gezogen werden, daß auf ihnen durch die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ jeweils (zu AB parallele) Strecken abgeschnitten werden. Ferner soll von jedem der 288 Punkte auf genau eine der Parallelen das Lot gefällt werden.

Man beweise: Bei jeder Verteilung der 288 Punkte im Innern des Quadrates ist es möglich, die Parallelen und die Lote so zu wählen, daß die Summe L der Längen aller dieser Parallelstrecken und aller dieser Lote kleiner als $24a$ wird.

Aufgabe 081045:

Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $4 \cdot \log_4 x + 3 = 2 \cdot \log_x 2$ erfüllen!

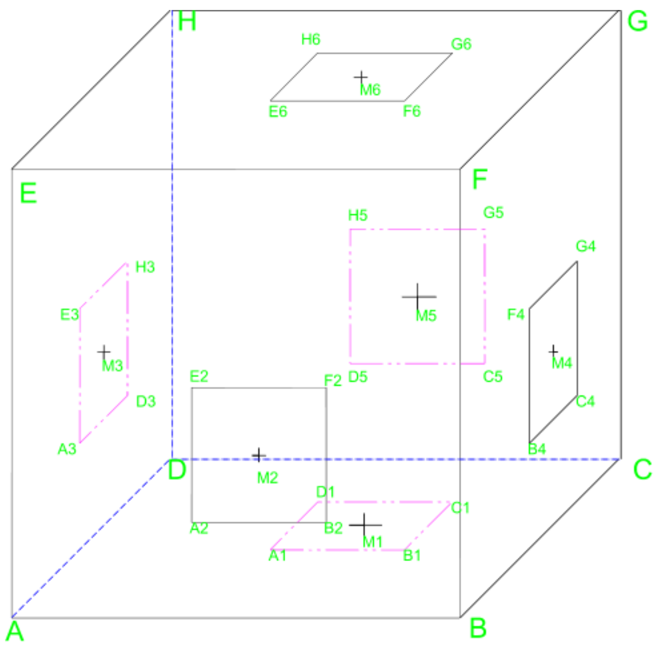
Aufgabe 081046:

Die Abbildung zeigt einen Würfel

$$W = ABCDEFGH$$

mit der Kantenlänge a.

In den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $DCGH$, $EFGH$ von W sind kantenparallele Quadrate $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2F_2E_2$, $A_3D_3H_3E_3$, $B_4C_4G_4F_4$, $D_5C_5G_5H_5$, $E_6F_6G_6H_6$ einer Kantenlänge $x < a$ und mit den Mittelpunkten $M_1, \ldots, M_6$ gelegen, und zwar so, daß die drei Geraden $g_{M_1M_6}$, $g_{M_2M_5}$, $g_{M_3M_4}$ kantenparallel verlaufen und sich in einem und demselben Punkt schneiden.



Aus W werden die drei Quader $A_1B_1C_1D_1E_6F_6G_6H_6$, $A_2B_2F_2E_2D_5C_5G_5H_5$, $A_3D_3H_3E_3B_4C_4G_4F_4$ herausgeschnitten.

Für welchen Wert von x hat der entstandene Restkörper das halbe Volumen des ursprünglichen Würfels?

8. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 081041:

a) Mit den Bezeichnungen aus der Aufgabe wird

$$c \cdot d = h_c \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2 \cdot \frac{F}{\sin\gamma} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\gamma)} = a \cdot b$$

b)

$$a \cdot b = d \cdot h_c = d \cdot 2 \cdot \frac{F}{c}$$

$$F = \frac{a \cdot b \cdot c}{2d}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Caban

Lösung 081042:

Wegen $ab > 0$ sind a und b entweder beide positiv oder beide negativ, also die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ in jedem Falle positiv. Dann ist deren Summe wegen $a \neq b$ echt größer als 2 und $x > 1$, sodass $\sqrt{x-1}$ definiert ist. Aufgrund der strengen Monotonie der Wurzel-Funktion ist auch $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$, sodass der Nenner von s nie verschwindet und dieser Term also für jede solche Wahl von a und b wohldefiniert ist.

Zur Vereinfachung von s erweitern wir den Bruch mit $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ und erhalten

$$s = \frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2} = \frac{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$$

Dabei ist

$$x^2 - 1 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{a^2} - 4\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2$$

Setzt man dies ein, erhält man

$$s = x + \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2}\left|\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right|$$

Ist $|a| > |b|$, so ist die Differenz im Betrag positiv und man erhält $s = \frac{a}{b}$, andernfalls ist sie negativ und man erhält $s = \frac{b}{a}$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081043:

Definieren wir zusätzlich $R_0 := P$, $R_n := Q$, sowie b_0 und b_n als Halbkreise über dem Durchmesser PQ in H' bzw. H, so ist nun allgemein nach dem Inhalt der Fläche zwischen den beiden Kurven b_{i-1} und b_i mit

$1 \leq i \leq n$ gefragt. Sei diese Fläche mit F_i bezeichnet.

Man kann F_i zerlegen in den Teil davon, der in H liegt, und den, der in H' liegt. Der erste lässt sich darstellen als die Differenz der Halbkreise in H über den Durchmessern PR_i und PR_{i-1}, der zweite als Differenz der Halbkreise in H' über den Durchmessern $R_{i-1}Q$ und R_iQ.

Damit berechnet sich der Flächeninhalt der Figur F_i zu

$$\frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2} + \frac{(n-(i-1))^2}{n^2} - \frac{(n-i)^2}{n^2} \right) \cdot (2r)^2 = \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot n^2} \cdot (2i - 1 + 2(n-i) + 1) = \frac{1}{n} \cdot \pi r^2$$

Der Kreis wird also in n flächengleiche Flächenstücke zerlegt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081044:

Zeichnen wir die zwölf Parallelstrecken im Abstand $\frac{1}{24}a$, $\frac{3}{24}a$, $\frac{5}{24}a$, $\ldots$, $\frac{23}{24}$ zu AB in das Quadrat ein, so liegt jeder Punkt im Inneren (oder auf dem Rand) des Quadrats in einer Entfernung von höchstens $\frac{1}{24}a$ zur nächsten dieser Parallellinie, sodass das Lot des Punktes auf diese Parallellinie höchstens diese Länge besitzt.

Also ist die Summe der Länge aller dieser Lote höchstens $288 \cdot \frac{1}{24}a = 12a$. Hinzu kommen die Streckenlängen der Parallelstrecken, welche jeweils a lang sind, sodass für diese Verteilung $L \leq 24a$ folgt.

Liegt mindestens einer der 288 Punkte nicht auf einer Parallelen zu AB im Abstand von $\frac{2k}{24}$ mit einer natürlichen Zahl $1 \leq k \leq 11$, so ist sein Lot zu seiner nächstgelegenen eingezeichneten Parallelstrecke echt kleiner als $\frac{1}{24}a$, sodass für diese Verteilung sogar $L < 24a$ folgt. (Der Punkt darf ja laut Aufgabenstellung nicht auf dem Rand liegen, sodass die Fälle $k = 0$ und $k = 12$ auch nicht möglich sind.)

Andernfalls liegen alle 288 Punkte auf einer der elf Parallelen zu AB im Abstand von $\frac{2k}{24}$ mit $1 \leq k \leq 11$, sodass man anstatt der oben genannten nun diese 11 Parallelstrecken einzeichnen kann. Die Lote der Punkte auf die Strecke, auf der sie liegen, sind jeweils 0 lang, sodass in diesem Fall L nur aus den Längen der Parallelstrecken besteht, also man in diesem Fall sogar $L = 11a < 24a$ erreichen kann.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081045:

Mit $\log_b a = \frac{\log_2 a}{\log_2 b}$ und $y := \log_2 x$ geht die Gleichung über in $[4 \cdot \frac{y}{2} + 3 = 2 \cdot \frac{1}{y}$, also

$$2y^2 + 3y - 2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

Damit erhält man die erste Lösung $y_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ und also $x_1 = 2^{y_1} = \sqrt{2}$ und als zweite $y_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$ und damit $x_2 = 2^{y_2} = \frac{1}{4}$.

Einsetzen in die Ausgangsgleichung bestätigt beide Werte.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081046:

Jeder der drei herausgeschnittenen Quader hat ein Volumen von $x^2 \cdot a$. Jedoch überschneiden sie sich in einem Würfel der Kantenlänge x (und Mittelpunkt als Schnittpunkt der drei Geraden $g_{M_1M_6}$, $g_{M_2M_5}$ und $g_{M_3M_4}$), sodass dieser Teil nur von einem Quader herausgeschnitten wird, die beiden übrigen ihn aber nicht erneut entfernen.

Also hat der Restkörper ein Volumen von $a^3 - 3ax^2 + 2x^3$. Wenn dies gleich dem halben Volumen des Ausgangswürfels entsprechen soll, muss

$$\frac{1}{2}a^3 = a^3 - 3ax^2 + 2x^3 \qquad \text{bzw.} \qquad 4x^3 - 6ax^2 + a^3 = 0$$

gelten. Offenbar erfüllt $x = \frac{a}{2}$ diese Gleichung, da

$$4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 - 6 \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^3 = \left(\frac{4}{8} - \frac{6}{4} + 1\right) \cdot a^3 = 0$$

ist. Also kann man $4x^3 - 6ax^2 + a^3$ darstellen als $4x^3 - 6ax^2 + a^3 = (2x - a) \cdot (2x^2 - 2ax - a^2)$. Wäre $x \neq \frac{a}{2}$, so müsste der zweite Faktor $2x^2 - 2ax - a^2$ also Null ergeben. Die Lösungen für die sich so ergebende Gleichung in x lauten

$$\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Dabei ist jedoch die eine Lösung $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot a$ negativ (für $a > 0$) und die andere $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot a$ größer als a und somit auch nicht zulässig.

Es verbleibt die einzig mögliche Wahl für x im Intervall $[0, a]$ mit $x = \frac{1}{2}a$ als einzige Lösung.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix