8. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081031:

In einem Dreieck ΔABC sei $\overline{AB} = 18\text{cm}$. Zu dieser Seite werde im Innern dieses Dreiecks eine Parallele gezogen, so daß ein Trapez $ABDE$ entsteht, dessen Flächeninhalt F_2 ein Drittel des Flächeninhalts F_1 des Dreieck ΔABC ist.

Berechnen Sie die Länge der Seite $\overline{DE}$ des Trapezes!

Aufgabe 081032:

Die fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 10, 11, 12, 13 und 14 haben die Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate der ersten drei dieser Zahlen gleich der Summe der beiden letzten Zahlen ist. Es gilt also

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

a) Gibt es noch andere fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft?

b) Gegeben sei eine positive ganze Zahl n. Ermitteln Sie alle Zusammenstellungen von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, für die die Summe der Quadrate der ersten $n + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten n Zahlen ist:

   1) für $n = 3$!
   2) für beliebiges positives ganzes n!

Aufgabe 081033:

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b mit $a > b$ und $a^2 + b^2 = 6\,ab$ stets

$$\lg(a + b) - \lg(a - b) = \frac{1}{2} \lg 2 \text{ gilt!}$$

Aufgabe 081034:

Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S_y(0; 8)$.

Ermitteln Sie die reellen Zahlen p und q!

Aufgabe 081035:

Beweisen Sie folgende Behauptung:

Zeichnet man in einem Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen und legt an ihren Endpunkten Tangenten an den Kreis, so ist das entstehende Tangentenviereck gleichzeitig auch ein Sehnenviereck.

Aufgabe 081036:

Beweisen Sie die folgende Behauptung!

Wenn p und q Primzahlen sind ($p > 3$, $q > 3$), dann ist $p^2 - q^2$ ein Vielfaches von 24.

8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 081031:

Den Flächeninhalt F_3 des Dreiecks $\triangle CDE$ erhält man als Differenz der Flächeninhalte des Dreiecks $\triangle ABC$ und des Trapezes $ABDE$, also $F_3 = F_1 - F_2 = \frac{2}{3} \cdot F_1$.

Da die Strecken DE und AB parallel sind, sowie E und A bzw. D und B jeweils auf einem von C ausgehenden Strahl liegen, geht das Dreieck $\triangle CDE$ aus dem Dreieck $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit Zentrum C hervor. Der Streckungsfaktor sei k. Dann gilt $F_3 = k^2 \cdot F_1$, also $k = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, und damit $|DE| = k \cdot |AB| = \sqrt{6} \cdot 3$ cm.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081032:

b) Angenommen, es gäbe $2n + 1$ Zahlen der gesuchten Art. Bezeichnen wir die $(n + 1)$-te dieser Zahlen mit x, so lauten sie $x - n$, $x - n + 1$, ..., x, ..., $x + n$ und erfüllen die Gleichung

$$(x-n)^2 + ... + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + ... + (x+n)^2. \tag{1}$$

Wegen $(x+k)^2 - (x-k)^2 = 4kx$ $(k = 1, ..., n)$ folgt aus Gleichung (1) $x^2 = 4(1 + ... + n)x = 4\frac{n(n+1)}{2}x$, also

$$x(x - 2n(n+1)) = 0. \tag{2}$$

Daher muß $x = 0$ oder $x = 2n(n+1) = 2n^2 + 2n$ sein, d.h., es kommen nur die Zusammenstellungen

$$-n, -n+1, ...0, ..., n, \tag{3}$$
$$2n^2 + n, 2n^2 + n + 1, ..., 2n^2 + 2n, ...2n^2 + 3n \tag{4}$$

als Lösungen in Frage.

In der Tat erfüllen (3) und (4) die Bedingungen der Aufgabe; denn sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 2n(n+1)$ ist (2) erfüllt, woraus man umgekehrt wie oben auf (1) schließen kann.

a) Setzt man in b) speziell $n = 2$, so entsteht a). Man erhält hierfür aus (4) die bereits genannten Zahlen 10, ..., 14, aus (3) die somit einzige weitere Lösung -2, ..., 2.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (2)

Lösung 081033:
Es gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 6ab \\ 2a^2+2b^2-4ab &= a^2+b^2+2ab \\ 2(a-b)^2 &= (a+b)^2 \\ \sqrt{2}|a-b| &= |a+b| \end{aligned}$$

wobei ebenfalls nach Voraussetzung $a > b$ und damit $a-b > 0$ und daher $|a-b| = a-b$. Ferner gilt a, b positiv und damit $a+b = |a+b| > 0$. Es gilt also: $\sqrt{2}(a-b) = a+b$ und daher:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \sqrt{2} \\ \lg\frac{a+b}{a-b} &= \lg 2^{\frac{1}{2}} \\ \lg(a+b)-\lg(a-b) &= \frac{1}{2}\lg 2 \quad \square \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 081034:
Aufgrund des angegebenen Punkts S_y auf der Parabel ist $q = 8$. Die Nullstellen der Funktion können angegeben werden durch $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, sodass sich ihr Abstand berechnet zu $2\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} = \sqrt{p^2-4q}$. Dieser ist nach Aufgabenstellung gleich 7, sodass sich $p^2-4q = 49$ bzw. $p^2 = 81$, also $p = \pm 9$ ergibt.

Damit ergeben sich zwei Lösungspaare: $(p,q) = (-9,8)$ oder $(p,q) = (9,8)$. Die Probe bestätigt beide Ergebnisse.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081035:
Es gilt der Satz:

Beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel eines Vierecks 180°, so ist das Viereck ein Sehnenviereck.

M sei der Mittelpunkt eines Kreises, KG und LH seien zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen eines Kreises. Die in ihren Endpunkten an den Kreis gelegten benachbarten Tangenten mögen sich in den Punkten A, B, C, D schneiden, so dass G, H, K, L in dieser Reihenfolge auf AB, BC, CD, DA liegen.

Da KG und LH aufeinander senkrecht stehen, ist $\sphericalangle KGH + \sphericalangle GHL = 90°$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 081036:
Beweis:

Einerseits ist p ungerade, also $p-1$ und $p+1$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen, sodass eine von beiden sogar durch 4, also $p^2-1 = (p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar ist. Analog ist q^2-1 und damit auch $p^2-q^2 = (p^2-1)-(q^2-1)$ durch 8 teilbar.

Andererseits ist, da q teilerfremd zu 3 ist, genau eine der drei im Abstand q aufeinander folgenden ganzen Zahlen $p-q$, p, $p+q$ durch 3 teilbar. Da es p nicht ist, muss es also eine der beiden anderen Zahlen, und damit auch $p^2-q^2 = (p-q)(p+q)$ sein.

Da 8 und 3 teilerfremd sind, folgt aus der Teilbarkeit von p^2-q^2 durch 8 und durch 3 auch die durch $8 \cdot 3 = 24$, $\square$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972

(28) alpha, Mathematische Schülerzeitschrift