8. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081021:

Eine arithmetische Zahlenfolge ist eine Folge $\{a_1, a_2, ...\}$ von Zahlen, bei der die sämtlichen Differenzen $a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, ...)$ einander gleich sind.

Zeigen Sie, daß es genau eine arithmetische Zahlenfolge gibt, bei der für jedes $n = 1, 2, ...$ die Summe $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ der ersten n Glieder $n^2 + 5n$ beträgt!

Aufgabe 081022:

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die der Bedingung $\log_2 [\log_2(\log_2 x)] = 0$ genügen!

Aufgabe 081023:

Verbindet man einen beliebigen, im Innern eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkt mit je einem Punkt der drei Dreieckseiten, dann ist die Summe der Längen dieser drei Verbindungestrecken stets größer oder gleich der Höhenlänge dieses gleichseitigen Dreiecks.

Beweisen Sie diese Aussage!

Aufgabe 081024:

Ein Kraftwagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Straße von A nach B. Ein zweiter Kraftwagen fährt auf der gleichen Straße ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit von B nach A. Beide Kraftwagen beginnen diese Fahrt zur gleichen Zeit in A bzw. in B. An einer bestimmten Stelle der Straße begegnen sie einander.

Nach der Begegnung habe der erste noch genau 2 h bis nach B zu fahren, der zweite noch genau $\frac{9}{8}$ h bis nach A. Die Entfernung zwischen A und B beträgt (auf der Straße gemessen) 210 km.

Ermitteln Sie die Geschwindigkeiten der Kraftwagen!

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 081021:

Ist d die Differenz der arithmetischen Folge (a_n), so gilt $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1, 2, ...$ Es folgt

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1 + 0 \cdot d) + (a_1 + 1 \cdot d) + (a_1 + 2 \cdot d) + ... + (a_1 + (n-1) \cdot d) \\ &= n \cdot a_1 + (0 + 1 + 2 + ... + (n-1)) \cdot d = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d \end{aligned}$$

Es soll $s_n = n^2 + 5n$, also $n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d = n^2 + 5n$ für alle $n = 1, 2, ...$ gelten. Es folgt $a_1 + \frac{n-1}{2} d = n + 5$ für alle $n = 1, 2, ...$

Für $n = 1$ erhalten wir $a_1 = 6$ und mit $n = 2$ dann $6 + \frac{1}{2} d = 7$, also $d = 2$.

Es handelt sich also um die arithmetische Folge $6, 8, 10, 12, ...$

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 081022:

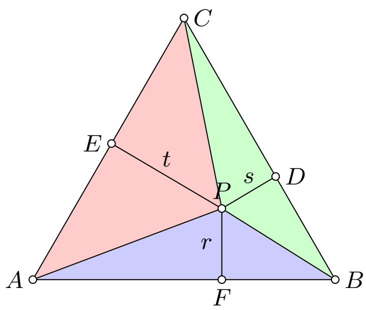
Es ist

$$\begin{aligned} \log_2 [\log_2(\log_2 x)] &= 0 \\ [\log_2(\log_2 x)] &= 1 \\ 1 \leq \log_2(\log_2 x) &< 2 \\ 2 \leq \log_2 x &< 4 \\ 4 \leq x &< 16 \end{aligned}$$

Die Bedingung wird also genau von den reellen Zahlen x erfüllt, die kleiner als 16 und größer oder gleich 4 sind.

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 081023:



Ist P ein beliebiger Punkt im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks, so ist die Summe der Abstände dieses Punktes von den Seiten konstant:

$$r + s + t + u = h = 3r$$

Dabei bezeichnet h die Höhe des Dreiecks und r den Inkreisradius.

Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ist so groß wie die Summe der Flächen der farbig markierten Dreiecke.

Für die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ABC gilt $\frac{gh}{2}$, wobei $g = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ die Grundseite und h die Höhe sein soll. Die Summe der Flächen der farbig markierten Dreiecke ist

$$\frac{gr}{2} + \frac{gs}{2} + \frac{gt}{2} \qquad \text{also} \qquad \frac{gh}{2} = \frac{gr}{2} + \frac{gs}{2} + \frac{gt}{2}$$

Damit folgt die Behauptung $h = s + t + u$.

Anmerkung: Diese Aussage ist der Satz von Viviani.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (37)

Lösung 081024:

t ist die Zeit, bis sich beide Autos begegnen. t_1 und t_2 sind die gegebenen "Restzeiten", s ist der Gesamtweg.

Zieht man vom Gesamtweg s den bereits zurückgelegten Weg (tv_1 bzw. tv_2) ab, erhält man den Weg, der noch zurückgelegt werden muss (t_1v_1 bzw. t_2v_2)

$$I \quad s - tv_1 = v_1t_1 \qquad ; \qquad II \quad s - tv_2 = v_2t_2$$

mit $t = \frac{s}{v_1+v_2}$, $t_1 = 2$ h, $t_2 = 8/9$ h und $s = 210$ km ergibt sich das Gleichungssystem (ohne Einheiten):

$$I \quad 210 - 210\frac{v_1}{v_1+v_2} = 2v_1 \qquad ; \qquad II \quad 210 - 210\frac{v_2}{v_1+v_2} = \frac{9}{8}v_2$$

$$I \quad 210\frac{v_2}{v_1+v_2} = 2v_1 \qquad ; \qquad II \quad 210\frac{v_1}{v_1+v_2} = \frac{9}{8}v_2$$

$$\frac{I}{II} \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{16}{9}\frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow v_1 = 60\frac{km}{h} \qquad ; \qquad v_2 = 80\frac{km}{h}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Caban

Quellenverzeichnis

(37) Satz von Viviani in der Wikipedia