8. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080921:

Gesucht werden fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren jede größer als 1 ist und von denen die kleinste durch 2 und die nächstfolgenden der Reihe nach durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilbar sein sollen.

a) Nennen Sie ein Beispiel für fünf derartige Zahlen!

b) Wie kann man alle Lösungen der Aufgabe erhalten?

Aufgabe 080922:

Von einem Dreieck ΔABC seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt.

Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!

Aufgabe 080923:

Geben Sie alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen an, für die $x^3 - y^3 = 999$ ist!

Aufgabe 080924:

Vier Personen A, B, C und D machen je drei Angaben über eine gleiche Zahl x. Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Angabe wahr und mindestens eine Angabe falsch sein.

A sagt:

(1) Das Reziproke von x ist nicht kleiner als 1.
(2) x enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.
(3) Die 3. Potenz von x ist kleiner als 221.

B sagt:

(1) x ist eine gerade Zahl.
(2) x ist eine Primzahl.
(3) x ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5.

C sagt:

(1) x ist irrational.
(2) x ist kleiner als 6.
(3) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.

D sagt:

(1) x ist größer als 20.
(2) x ist eine positive ganze Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens 3 Stellen enthält.
(3) x ist nicht kleiner als 10.

Ermitteln Sie x!

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 080921:

a) Ein Beispiel ist $2, 3, 4, 5, 6$.

b) Nennen wir die erste Zahl n. n muss durch 2 teilbar, also gerade sein.

$n + 1$ muss durch 3 teilbar sein, also muss n bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. $n + 2$ muss durch 4 teilbar sein. Da n gerade ist, ist $n + 2$ auch gerade und genau dann durch 4 teilbar, wenn n nicht durch 4 teilbar ist.

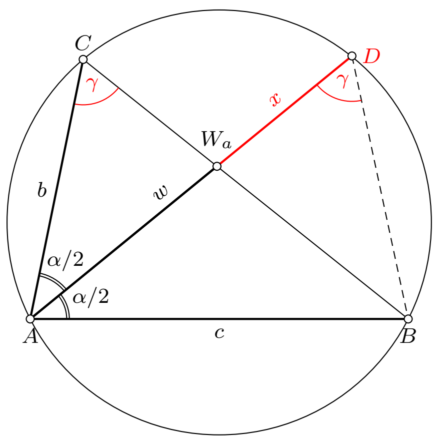
$n + 3$ muss durch 5 teilbar sein, also muss n bei Division durch 5 den Rest 2 lassen. $n + 4$ muss durch 6 teilbar sein. Durch 2 teilbar ist es auf jeden Fall, da n gerade ist. Da n bei Division durch 3 den Rest 2 lässt ist $n + 4$ auch durch 6 teilbar. Also muss n die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

n muss gerade aber nicht durch 4 teilbar sein, bei Division durch 3 den Rest 2 lassen und bei Division durch 5 ebenfalls den Rest 2 lassen.

Für die Uni: Mit dem Chinesischen Restsatz kann man hieraus $n \equiv 2 \mod 60$ folgern.

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa

Lösung 080922:



Es seien die Seitenlängen c von AB und b von AC, so wie die Länge w der Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ bekannt. Es sei E der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite BC und es sei D der

Schnittpunkt der Verlängerung von w mit dem Umkreis.

Gesucht ist die Länge x der Sehne AD.

Nach Umfangswinkelsatz gilt $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$. Per Definition der Winkelhalbierenden w gilt außerdem $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$. Also stimmen die Dreiecke ABD und AEC in zwei Winkeln überein und sind somit ähnlich. Insbesondere gilt also $\frac{x}{c} = \frac{b}{w}$, d.h. $x = \frac{bc}{w}$.

Aufgabe gelöst von Nuramon

2.Lösung

Zeichnet man die Verbindung $|DB|$ ein, so erhält man gemäß dem Umfangswinkelsatz gleiche Umfangswinkel (γ) bei C und D über dem Kreisbogen AB. Demnach sind die Dreiecke AWC und ABD ähnlich, da sie zwei gleiche Winkel haben (γ und $\dfrac{\alpha}{2}$).

Entsprechenden gelten die Seitenverhältnisse $\dfrac{b}{w} = \dfrac{w+x}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{bc}{w} - w = x = |WD|$ für die Verlängerung bzw. $|AD| = x + w = \dfrac{bc}{w}$ für die ganze Sehne.

Aufgeschrieben und gelöst von Hyperplot

Lösung 080923:

Offenbar erfüllt jede Lösung $x > y$. Es gibt also ein positives $z \in \mathbb{N}$ mit $x = y+z$. Das führt zur äquivalenten Gleichung

$$z(z^2 + 3yz + 3y^2) = 999.$$

Es muss also z ein Teiler von $999 = 3^3 \cdot 37$ sein. Da $z(z^2 + 3yz + 3y^2)$ genau dann durch 3 teilbar ist, wenn z durch drei teilbar ist und weil $z \leq z^2 + 3yz + 3y^2$ gilt, bleiben nur noch die Möglichkeiten

$$(z, z^2 + 3yz + 3y^2) = (3, 333) \quad \text{und} \quad (z, z^2 + 3yz + 3y^2) = (9, 111) \quad \text{übrig.}$$

1. $(z, z^2 + 3yz + 3y^2) = (3, 333)$

   Dann gilt $9 + 9z + 9y^2 = 333$, also $y^2 + 3y = 108$. Die einzige natürliche Lösung dieser Gleichung ist $y = 9$.

   Das führt zur Lösung $(x, y) = (12, 9)$.

2. $(z, z^2 + 3yz + 3y^2) = (9, 111)$

   Dann ist $81 + 27y + 3y^2 = 111$, also $y^2 + 9y = 10$, also $y = 1$. Somit ist $(x, y) = (10, 1)$ eine Lösung.

Insgesamt gibt es also genau zwei Lösungspaare, nämlich $(12, 9)$ und $(10, 1)$.

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon

Lösung 080924:

Da eine der Aussagen von B wahr ist, muss x eine ganze Zahl sein.

Wäre Aussage $D2$ wahr, so wären es auch $D1$ und $D3$. Also ist $D2$ falsch, d.h. es muss $x < 100$ sein.

Da $D1$ die Aussage $D3$ impliziert und mindestens eine der Aussagen $D1$ bzw. $D3$ wahr sein muss, ist $D3$ wahr. Also ist x eine ganze Zahl mit $x \geq 10$.

$C1$ ist falsch, da x ganz ist. $C2$ ist falsch, da $x \geq 10$ ist. Also muss $C3$ wahr sein, d.h. x ist eine Quadratzahl.

Aussage $A1$ ist falsch, denn $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{10} < 1$. Aussage $A3$ ist falsch, denn $x^3 \geq 10^3 > 221$. Also ist $A2$ wahr. Damit bleiben nur noch die Möglichkeiten $25, 49$ oder 81 für x übrig.

Da x Quadratzahl ist, ist $B2$ falsch. Also muss x gerade oder durch 5 teilbar sein. Somit bleibt als einzige Option $x = 25$ übrig.

Tatsächlich erfüllt $x = 25$ die Anforderungen der Aufgabe: $A1$, $B1$, $C1$, $D2$ sind falsch und $A2$, $B3$, $C3$, $D1$ sind wahr.

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon