8. Mathematatik Olympiade

1. Stufe (Schulolympiade)

Klasse 9

Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

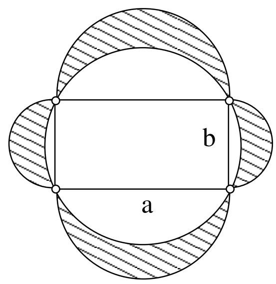
Aufgabe 080911:

Eine FDJ-Versammlung wurde so stark besucht, daß genau 75 Prozent der FDJler Platz fanden. Daher wurde beschlossen, eine zweite Versammlung in einem anderen Raum zu veranstalten. Es gingen 150 der Jugendfreunde dorthin. Die übrigen blieben im ersten Raum. Dadurch wurden in diesem genau 5 Plätze frei.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Jugendfreunde, die zu der ursprünglich angesetzten Veranstaltung erschienen waren!

Aufgabe 080912:

Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abbildung).



Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der vier schraffierten sichelförmigen Flächen!

Aufgabe 080913:

Konstruieren Sie ein Trapez aus a, b, c und d!

Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite BC, c die Länge der Seite CD und d die Länge der Seite DA. Weiterhin soll $AB \parallel CD$ und $a > c$ gelten.

Aufgabe 080914:

In

$$\begin{array}{cccccc}
1 & * & * & \cdot & * & * \\
\hline
 & * & * & * & 1 & \\
 & & * & * & * & 1 \\
\hline
 & * & * & * & 1 & *
\end{array}$$

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 080911:

Das Problem ist beschrieben durch $0,25 \cdot x + 5 = 150$. Also erschienen 580 Jugendliche, von denen zunächst 435 Platz fanden, bevor 150 gingen.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Sattler

Lösung 080912:

Die Summe der Flächeninhalte der vier Halbkreisflächen über den Rechteckseiten beträgt

$$A_1 = \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right).$$

Der Flächeninhalt des Umkreises beträgt

$$A_2 = \pi\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}\right) = \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right).$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks A ist also

$$A_3 = ab.$$

Der gesuchte Flächeninhalt A ist also

$$A = A_1 + A_3 - A_2 = \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) + ab - \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right).$$

Die Summe der Flächeninhalte der sichelförmigen Fläche ist somit gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 080913:

a) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Zieht man durch C die Parallele zu DA, dann schneidet diese AB, da $a > c$ ist. Der Schnittpunkt sei E. Es entstehen das Dreieck ΔEBC mit $EB = a - c$ und das Parallelogramm $AECD$ mit $|CE| = d$.

   ΔEBC ist konstruierbar aus $a - c$, b, d nach Kongruenzsatz (sss).
   ΔABC ist konstruierbar aus $|CB|$, $\sphericalangle CBE$, a nach Kongruenzsatz (sws).
   ΔACD ist konstruierbar aus $|AC|$, c, d nach Kongruenzsatz (sss).

b) Daraus ergibt sich, daß ein Trapez nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

- Man zeichne die Strecke EB der Länge $a - c$.
- Punkt C liegt dann auf dem Kreis um B mit dem Radius b und auf dem Kreis um E mit dem Radius d.
- Punkt A liegt auf der Verlängerung von BE über E hinaus und auf dem Kreis um B mit dem Radius a.
- Punkt D liegt auf dem Kreis um C mit dem Radius c und auf dem Kreis um A mit dem Radius d, und zwar ist D derjenige der beiden Schnittpunkte dieser Kreise, der nicht auf derselben Seite der Geraden AC wie E liegt.

c) Beweis, daß ein so konstruiertes Trapez den Bedingungen der Aufgabe entspricht: nach Konstruktion gilt $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = |AE| = c$, $|DA| = |CE| = d$. Also ist $AECD$ ein Parallelogramm, und es gilt $AE \parallel CD$ und damit auch $AB \parallel CD$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a > c$.

d) Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn ΔEBC konstruierbar ist, und zwar dann auf genaueine Weise. Zur Konstruierbarkeit von ΔEBC ist notwendig nd hinreichend, daß die Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

$$a - c < b + d, \qquad b < a - c + d, \qquad d < a - c + b.$$

Ist eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein der Aufgabe entsprechendes Trapez.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 080914:

```
1ab.cd
------
  efg1
 hij1
------
 klm1n
```

$a..n$ sind jeweils Ziffern 0..9, wobei unterschiedliche Variablen denselben Wert haben dürfen. Offensichtlich muß dann $n = 1$ und $g = 0$ gelten, d.h. eine Teilaufgabe lautet $1ab \cdot d = ef01$. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingungen?

b und d müssen jeweils ungerade sein, weil nur das Produkt zweier ungerader Zahlen wieder ungerade ist. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ≤ 9 endet auf 1 in genau den Fällen: $1 \cdot 1 = 1$, $3 \cdot 7 = 21$, $7 \cdot 3 = 21$, $9 \cdot 9 = 81$.

Nun werden die obigen Fälle diskutiert:

1. $b = 1$, $d = 1$
$1a1 \cdot 1 = ef01 \Rightarrow e = 0, a = 0, f = 1 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$
$101 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 1, h = 0, i = 1, j = 0 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$

2. $b = 3$, $d = 7$
$1a3 \cdot 7 = ef01 \Rightarrow a = 4, e = 1, f = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$
$143 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 7, h = 1, i = 0, j = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$

3. $b = 7$, $d = 3$
$1a7 \cdot 3 = ef01 \Rightarrow a = 6, e = 0, f = 5 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$
$167 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 3, h = 0, i = 5, j = 0 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$

4. $b = 9$, $d = 9$
   $1a9 \cdot 9 = ef01 \Rightarrow a = 8, e = 1, f = 7 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$
   $189 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 9, h = 1, i = 7, j = 0 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$

Damit lauten die 4 Lösungen wie folgt:

```
101*11      143*77       189*99       167*33

------      ------       ------       ------
  0101        1001         1701         0501
 0101        1001         1701         0501

------      ------       ------       ------
 01111       11011        18711        05511
```

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Quellenverzeichnis

(12) Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag