8. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080831:

Beweise folgenden Satz: Jedes Dreieck ΔABC läßt sich in zwei rechtwinklige Teildreicke zerlegen.

Aufgabe 080832:

Von fünf äußerlich gleichen Kugeln haben genau drei gleiches Gewicht; die beiden übrigen, die untereinander gleich schwer sind, haben jeweils ein anderes Gewicht als jede der erstgenannten.

Beweise, daß in jedem Fall (d.h. bei jedem möglichen Resultat der durchgeführten Wägungen) drei Wägungen ausreichen, um die beiden letztgenannten Kugeln herauszufinden, wenn als Hilfsmittel nur eine zweischalige Waage ohne Wägestücke zur Verfügung steht!

Aufgabe 080833:

Es ist zu beweisen: Läßt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei der Division durch 9 den Rest r, so läßt auch die Zahl selbst bei der Division durch 9 den Rest r.

Aufgabe 080834:

Von einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{AD} = b$ $(b < a)$ ist durch genau eine Parallele zu einer Seite ein dem ursprünglichen Rechteck ähnliches abzuschneiden. Löse die Aufgabe durch Konstruktion!

Bemerkung: Zwei nicht quadratische Rechtecke heißen ähnlich, wenn das Längenverhältnis der größeren zur kleineren Seite bei beiden gleich ist.

Aufgabe 080835:

Fritz soll eine dreistellige natürliche Zahl z mit sich selbst multiplizieren. Er schreibt versehentlich als ersten Faktor eine um 5 kleinere Zahl hin. Darauf aufmerksam gemacht, sagt er: "Ich nehme als zweiten Faktor einfach eine um 5 größere Zahl, dann wird das Ergebnis richtig."

a) Ist diese Behauptung wahr?

b) Gesetzt, sie sei falsch, zwischen welchen Grenzen bewegt sich der absolute Fehler, wenn z alle dreistelligen Zahlen durchläuft?

Aufgabe 080836:

Die Zahlen a, b, c und d mögen folgenden Bedingungen genügen:

(1) $d > c$

(2) $a + b = c + d$

(3) $a + d < b + c$

Ordne die Zahlen der Größe nach (beginnend mit der größten)!

8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 080831:

Es genügt zu beweisen, daß in jedem Dreieck wenigstens ein Höhenfußpunkt zwischen den beiden Eckpunkten einer Dreiecksseite liegt. Das trifft auf den Fußpunkt der vom Scheitelpunkt eines größten Dreieckswinkels auf die gegenüberliegende Seite gefällten Höhe zu.

Beweis:

(1) Ein größter Winkel des Dreiecks ΔABC liege o.B.d.A bei C.

Der Fußpunkt des von diesem Punkt auf die Gerade g durch A und B gefällten Lotes sei D.

(2) Wir nehmen (o.B.d.A) an, D liege auf g außerhalb der Seite AB auf der anderen Seite von B bezüglich A oder in A.

Dann ist der Winkel $\sphericalangle BAC$ als Außenwinkel im Dreieck ΔDCA oder als rechter Winkel $\sphericalangle BDC$ nicht spitz.

Wegen (1) kann aber keiner dieser Winkel größer als 60° sein. Damit ist ein Widerspruch erreicht. Annahme (2) ist folglich falsch. □

Aufgeschrieben und gelöst von Heike Winkelvoß

Lösung 080832:

Zum Beweis wird ein Verfahren angegeben, das nach drei Wägungen sicher zum Ziel führt:

Wir bezeichnen die Kugeln mit $K_1 ... K_5$.

Bei der ersten Wägung lege man je eine Kugel, etwa K_1 und K_2, auf eine Waagschale, bei der 2. Wägung nehme man zwei weitere, bisher nicht gewogene Kugeln, etwa K_3 und K_4. Dann können die ersten beiden Wägungen folgende Resultate haben (in der Übersicht ist Gleichgewicht mit Gl. und nicht Gleichgewicht mit n. Gl. symbolisiert):

	1. Wägung	2. Wägung
a)	Gl.	Gl.
b)	Gl.	n. Gl.
c)	n. Gl.	Gl.
d)	n. Gl.	n. Gl.

Im Fall a) vergleiche man in der 3. Wägung eine Kugel der 1. Wägung, etwa K_1 mit der 5. Kugel. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_3 und K_4 die gesuchten Kugeln, andernfalls sind es K_1 und K_2.

Die Fälle b) und c) lassen sich durch Umnumerierung aufeinander zurückführen. Es genügt also, einen dieser Fälle zu betrachten, es sei der Fall b).

Man vergleiche in der dritten Wägung eine der beiden Kugeln K_1 oder K_2 mit einer der Kugeln K_3 oder K_4.

Es werde z.B. K_1 mit K_3 verglichen. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_4 und K_5 die gsuchten Kugeln, herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_3 und K_5.

Im Fall d) vergleiche man schließlich eine der gewogenen Kugeln, etwa K_1, mit der 5. Kugel. Es sei o.B.d.A. die Kugel K_1 leichter als K_2. Ebenso sei o.B.d.A. K_3 leichter als K_4.

Herrscht nun beim Vergleich mit K_5 Gleichgewicht, so sind K_2 und K_4 die gesuchten Kugeln; herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_1 und K_3. In jedem Falle (und andere Fälle gibt es nicht) hat man die beiden gesuchten Kugeln mit drei Wägungen ermittelt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 080833:

Die Zahlen 1, 10, 100, 1000, ... lassen bei Division durch 9 jeweils den Rest 1, weil der Vorgänger jeder dieser natürlichen Zahlen durch 9 teilbar ist; die Zahlen 2, 20, 200, 2000, ..., die sich als 1 + 1, 10 + 10, 100 + 100, ... schreiben lassen, ergeben jeweils den Rest 2; die Zahlen 3, 30, 300, ... den Rest 3 usw., die Zahlen 8, 80, 800, ... den Rest 8, und 9, 90, 900, ... schließlich den Rest 0.

Nun lässt sich jede natürliche Zahl z in der Form

$$z = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_n \cdot 10n$$

schreiben (mit ganzen Zahlen a_i, für die $0 \leq a_i \leq 9$ gilt). Die Quersumme dieser Zahl lautet dann

$$Q(z) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Bei Division durch 9 lässt nach dem Obigen $a_0 \cdot 10^0$ den gleichen Rest wie a_0, $a_1 \cdot 10^1$ den gleichen Rest wie a_1, ..., $a_n \cdot 10^n$ den gleichen Rest wie a_n.

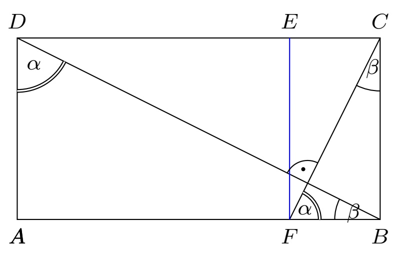
Die Summe z der $a_i \cdot 10^i$ lässt daher bei Division durch 9 den gleichen Rest wie die Summe $Q(z)$ der a_i.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 080834:

I. Angenommen, es gibt eine solche Parallele. Dann kann sie wegen $b < a$ nur parallel zur Seite AD gezogen werden. Es sei EF diese Parallele. Dann gilt:

   $ABCD \sim BCEF$ und damit auch: $\triangle ABD \sim \triangle BCF$. Daraus folgt: $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle BCF$.



II. Daher kommt man zu folgender Konstruktion:

   Man trägt im Punkt C an BC nach der Seite hin, auf der A liegt, einen Winkel von der Größe des Winkels $\sphericalangle ABD$ an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneide die Seite AB in F.

III. Die Parallele zu AD durch F entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:

Die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle BCF$ sind laut Konstruktion ähnlich; denn sie stimmen in den Winkeln überein. Daher gilt:

$AD : BF = AB : BC$ und mithin $ABCD \sim BCEF$.

IV. Die Konstruktion ist stets auf genau eine Weise ausführbar. Da die Größe des Winkels $\sphericalangle ABD$ zwischen $0°$ und $90°$ liegt, existiert ein solcher Schnittpunkt F und ist von B verschieden. Daher existiert das Dreieck $\triangle CFB$. Wegen (III) gilt

$$\frac{BC}{BF} = \frac{a}{b} > 1$$

also $BC > BF$, und F liegt zwischen A und B.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (15)

Lösung 080835:

a) Fritz sollte rechnen: $z \cdot z = z^2$. Er rechnete: $(z-5)(z+5) = z^2 - 25$. Sein Weg ist also falsch.

b) Der absolute Fehler beträgt in jedem Falle: -25.

Er ist also nicht je nach der Zahl z verschieden, sondern konstant.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (15)

Lösung 080836:

Wegen (1) gilt $b + d > b + c$, und weil $a + d < b + c$ ist, findet man $a + d < b + d$ und daraus $a < b$. (4)

Durch Subtraktion erhält man aus (2) und (3):

$$d - b < b - d \quad \rightarrow \quad 2d < 2b \quad \rightarrow \quad d < b \tag{5}$$

Aus (2) erhält man $b - d = c - a$, woraus sich wegen $b > d$ die Aussage (6) $c > a$ ergibt.

Wegen (4), (5) und (6) ist die gesuchte Reihenfolge $b > d > c > a$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" – Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission