8. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080711:

Der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen ist 6, ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist 210.

Ermittle alle Zahlenpaare mit den genannten Eigenschaften!

Aufgabe 080712:

Gegeben seien drei Gefäße, die genau 3 Liter, 8 Liter bzw. 18 Liter fassen können. Weiterhin ist die Möglichkeit gegeben, die Gefäße hinreichend oft mit Wasser zu füllen, zu leeren und ineinander umzufüllen.

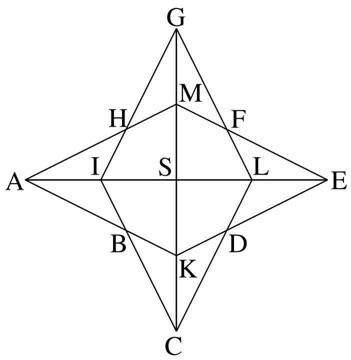
Zeige, daß es möglich ist, alle ganzzahligen Litermengen von 1 bis 18 unter ausschließlicher Verwendung der drei Gefäße abzumessen!

Aufgabe 080713:

Gegeben sei ein konvexes Sechseck, bei dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel verlaufen und gleich lang sind.

Zeichne alle Diagonalen ein, und beweise, daß es einen von den Eckpunkten des Sechsecks verschiedenen Punkt gibt, in dem sich genau drei Diagonalen schneiden!

Aufgabe 080714:



Die in der Abbildung dargestellte Sternfigur wird durch zwei kongruente Rhomben mit ihren Diagonalen gebildet. Die Diagonalenlängen sollen im Verhältnis 2 : 1 stehen, so daß die Strecken AE und CG durch die Punkte I, S, L bzw. M, S, K in je vier gleiche Abschnitte geteilt werden.

Vergleiche den Flächeninhalt des Achtecks $ABCDEFGH$ mit dem des Achtecks $IBKDLFMH$!

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 080711:

Beide gesuchten Zahlen sind 1. Teiler von 210 und 2. Vielfache von 6. Wegen $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ sind sowohl Teiler von 210 als auch Vielfache von 6 die folgenden Zahlen: 6, 30, 42 und 210 und nur diese. Folgende Zahlenpaare müssen untersucht werden:

(1) 6 und 30

(2) 6 und 42

(3) 6 und 210

(4) 30 und 42

(5) 30 und 210

(6) 42 und 210.

Bei den ersten beiden Paaren ist das kleinste gemeinsame Vielfache 30 bzw. 42, aber nicht 210; die Paare 5 und 6 haben als größten gemeinsamen Teiler 30 bzw. 42, aber nicht 6. Für die Paare 3 und 4 treffen die gestellten Bedingungen zu.

Die Zahlenpaare 6 und 210 sowie 30 und 42 erfüllen als einzige die gestellten Bedingungen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 080712:

Mit dem 3-l-Gefäß kann man durch (z.T. wiederholtes) Einschütten in das 18-l-Gefäß 3 l, 6 l, 9 l, 12 l, 15 l und 18 l, mit dem 8-l-Gefäß 8 l und 16 l abmessen. Durch das Ausgießen aus einem Gefäß in ein kleineres Gefäß erhält man 5 l und 10 l.

Gießt man das Wasser aus dem 18-l-Gefäß in beide kleineren Gefäße, bleiben 7 l als Rest zurück, und 11 l bekommt man dadurch, daß beide kleineren Gefäße in das große entleert werden. Füllt man die 7 l in das 3-l-Gefäß und in das 8-l-Gefäß, hat man in letzterem 4 l; gießt man diese wiederum in das wieder entleerte 3-l-Gefäß, verbleibt 1 l.

Entleert man das 18-l-Gefäß zweimal in das 8-l-Gefäß, bleiben 2 l zurück, und füllt man aus den beiden anderen Gefäßen 11 l nach, erhält man 13 l.

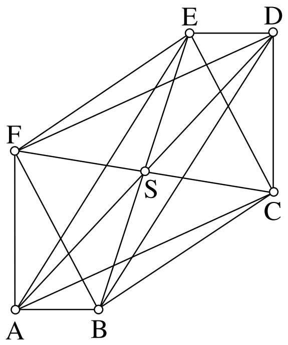
Wie gezeigt wurde, kann man 1 l im 8-l-Gefäß erhalten. Gießt man nun 1 l in das 18-l-Gefäß und zweimal 8 l dazu, befinden sich 17 l darin.

Um 14 l abzumessen, gießt man 3 l und 8 l aus dem 18-l-Gefäß in die kleineren Gefäße, und es verbleiben 7 l, davon gibt man 3 l in das kleinste und 4 l in das mittlere Gefäß. Nun füllt man das größte aufs neue vollständig und füllt das 8-l-Gefäß auf. So verbleiben 14 l.

(Es gibt viele andere Lösungen. Erwähnt sei etwa noch die folgende, einfache systematische: Nachdem man dreimal das 3-l-Gefäß, soweit wie möglich, in das 8-l-Gefäß entleert hat, verbleibt in ersterem 1 l. Diesen gießt man ins 18-l-Gefäß und wiederholt das Verfahren, bis dort die gewünschte Literzahl erreicht ist.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 080713:



Wir verwenden den Satz: Die Diagonalen im Parallelogramm halbieren einander.

Die Strecken BE und AD sind Diagonalen im Parallelogramm $ABDE$ und achneiden sich in S. Punkt S ist Mittelpunkt der Diagonalen BE und AD.

Im Parallelogramm $ACDF$ ist AD ebenfalls Diagonale, und S ist ebenfalls Mittelpunkt der Diagonalen AD und CF. Also ist Punkt S Mittelpunkt der drei Diagonalen AD, BE und CF und damit gemeinsamer Punkt dieser Diagonalen.

Die übrigen Diagonalen gehen nicht durch S, da jede von ihnen in einem der Parallelogramme $ABDE$, $ACDF$, $BCEF$ Seite ist, während S in jedem dieser Parallelogramme Mittelpunkt ist. Also gehen genau drei Diagonalen durch S.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 080714:

Die Dreiecke ΔSMF und ΔMGF sind flächengleich (gleich lange Grundlinie und gleich lange Höhe). Das gilt auch für die Dreiecke ΔSLF und ΔLEF, für ΔSLD und ΔLED u.s.w. Daraus folgt, daß der Flächeninhalt des Achtecks $ABCDEFGH$ doppelt so groß ist wie der des Achtecks $IBKDLFMH$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.