7. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 071231:

Drei gleich große Holzkugeln mit einem Radius der Länge r, die sich paarweise berühren, liegen auf einer ebenen Tischplatte.

Wie groß ist der Radius einer vierten Kugel, die alle drei Kugeln und die Tischplatte gleichzeitig berührt?

Aufgabe 071232:

Es ist das Produkt

$$\sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 45^\circ \sin 55^\circ \sin 65^\circ \sin 75^\circ \sin 85^\circ$$

in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich durch Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.

Beispiel: $\sin 30^\circ \sin 60^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

Aufgabe 071233:

Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$?

Aufgabe 071234:

Es sei $y = f(x)$ eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion, die für alle derartigen x folgende Gleichung erfüllt

$$f(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \tag{1}$$

Außerdem sei $y = g(x)$ eine ebenfalls für alle reellen x definierte Funktion. Für alle x sei $f(x)$ von 0 verschieden.

Beweisen Sie!

Die Funktion $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle reellen x die Gleichung

$$\varphi(x+1) = (x+1)\varphi(x), \tag{2}$$

wenn $g(x)$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 1 ist.

Aufgabe 071235:

In einer Weberei wird Garn von genau sechs verschiedenen Farben zu Stoffen von je genau zwei verschiedenen Farben verarbeitet. Jede Farbe kommt in mindestens drei verschiedenen Stoffsorten vor. (Dabei gelten zwei Stoffsorten dann und nur dann als gleich, wenn in ihnen dieselben zwei Farben auftreten.)

Beweisen Sie, daß man drei verschiedene Stoffsorten derart finden kann, daß in ihnen alle sechs Farben auftreten!

Aufgabe 071236:

Beweisen Sie, daß es stets möglich ist, von 6 Punkten einer Ebene, wobei keine 3 Punkte kollinear (d.h. auf derselben Geraden gelegen) seien, 3 Punkte derart auszuwählen, daß diese die Ecken eines Dreiecks bilden, das einen stumpfen Winkel von mindestens $120°$ enthält!

7. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 071231:

Die Mittelpunkte der drei großen Kugeln liegen alle in einer Ebene, die parallel zur Tischplatte in einem Abstand von r verläuft. Sie bilden ein gleichseitiges Dreieck $\triangle M_1M_2M_3$ mit Kantenlänge $2r$ und sei S der Schwerpunkt dieses Dreiecks.

Dann gilt $|M_1S| = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$, da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ teilt und jede Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck auch eine Höhe ist, deren Länge durch die Anwendung des Satzes von Pythagoras als $\sqrt{(2r)^2 - r^2}$ ermittelt werden kann.

Sei M der Mittelpunkt der vierten Kugel. Da sie die drei großen berührt, muss M aus Symmetriegründen auf dem Lot von S auf die Tischebene liegen. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle M_1SM$ mit rechtem Winkel bei S.

Ist R der gesuchte Radius der vierten Kugel, so gilt einerseits $|SM| = r - R$, da die vierte Kugel auch die Tischplatte (von oben) berührt und die Berührungsradien aller Kugeln auf die Tischplatte senkrecht zu dieser stehen, also der der vierten Kugel auch auf der Gerade MS liegt. Andererseits berühren sich aber auch die vierte und die erste Kugel, sodass ihre Mittelpunkte M_1 und M den Abstand $r + R$ haben.

Setzt man dies in die durch den Satz von Pythagoras gegebenen Gleichung für das rechtwinklige Dreieck $\triangle M_1SM$ ein, erhält man

$$(r+R)^2 = |M_1M|^2 = |M_1S|^2 + |SM|^2 = \frac{4}{3}r^2 + (r-R)^2$$

bzw. $4rR = (r+R)^2 - (r-R)^2 = \frac{4}{3}r^2$, also wegen $r > 0$ schließlich $R = \frac{1}{3}r$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 071232:

Ich verwende

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

und

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Mit der Doppelwinkelfunktion des Sinus und den bekannten Sinuswerten für 30° und 45° lässt sich das Produkt zunächst schreiben als $\frac{1}{64}\sqrt{2}\sin 10° \sin 50° \sin 70°$. Das verbleibende Produkt der Sinuswerte lässt sich vereinfachen zu:

$$\begin{aligned}\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ &= \frac{1}{2}(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ)\sin 70^\circ \\ &= \frac{1}{4}(2\cos 40^\circ \sin 70^\circ - \sin 70^\circ) \\ &= \frac{1}{4}(\sin 30^\circ + \sin 110^\circ - \sin 70^\circ) \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Somit ist der Produktwert $\frac{1}{512}\sqrt{2}$.

Aufgeschrieben und gelöst von einem Matheplanetarier

Lösung 071233:

Es ist

$$\begin{array}{ll} 7^1 \equiv 7 \pmod{100} & 7^2 \equiv 49 \pmod{100} \\ 7^3 \equiv 43 \pmod{100} & 7^4 \equiv 1 \pmod{100} \end{array}$$

also

$$7^{4k} \equiv 1 \pmod{100} \quad 7^{4k-1} \equiv 43 \pmod{100}$$

wobei k eine beliebige natürliche von Null verschiedene Zahl ist. Nun ist

$$7 \equiv -1 \pmod 4, \text{ also } \quad 7^7 \equiv -1 \pmod{100}$$

d.h. $7^7 = 4m - 1$, wobei m eine von 0 verschiedene natürliche Zahl ist. Daraus folgt

$$7^{7^7} = 7^{4m-1} \equiv 43 \pmod{100}$$

Da somit

$$7^{7^7} ? 7^{4m-1} \equiv -1 \pmod 4$$

d.h. $7^{7^7} = 4m' - 1$ (m' natürliche von 0 verschiedene Zahl) ist, folgt weiter

$$7^{7^{7^7}} = 7^{7^{4m-1}} = 7^{4m'-1} \equiv 43 \pmod{100}$$

Daher ist die zu untersuchende Zahl

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7} \equiv 43 - 43 \equiv 0 \pmod{100}$$

d.h. durch 100 teilbar; jede ihrer letzten beiden Ziffern ist also 0.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 071234:

Zuerst nehmen wir an, dass g 1-periodisch ist, für alle reellen x also $g(x+1) = g(x)$ gilt. Dann ist

$$\phi(x+1) = f(x+1) \cdot g(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \cdot g(x) = (x+1) \cdot \phi(x)$$

erfüllt also die gewünschte Funktionalgleichung.

Anders herum sei nun für jedes x die Gleichung $\phi(x+1) = (x+1) \cdot \phi(x)$ erfüllt, was nach Einsetzen der Definition von ϕ äquivalent ist zu

$$f(x+1) \cdot g(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \cdot g(x) = f(x+1) \cdot g(x)$$

Da $f(x+1) \neq 0$, kann man diese zweite Gleichheit durch Division durch $f(x+1)$ zum Gewünschten $g(x+1) = g(x)$ äquivalent umformen.

Bemerkung: Die Annahme aus der Aufgabenstellung, dass $f(x)$ für alle reellen Zahlen ungleich 0 wäre, steht im Widerspruch zur Funktionalgleichung, die f erfüllen soll, denn es ist sonst $f(0) = 0 \cdot f(-1) = 0$. Man kann die Aufgabe aber leicht retten, indem man sich nur auf positive Argumente x einschränkt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 071235:

Die Farben seien von 1 bis 6 durchnumeriert.

O.B.d.A. existiere der Stoff mit den Farben 1 und 2, den wir kurz mit 1-2 bezeichnen wollen. Dann gilt für die vier übrigen Farben der Menge $R = \{3, 4, 5, 6\}$, dass sie untereinander noch jeweils mit mindestens einer weiteren Farbe aus R in einem gemeinsamen Stoff vorkommen müssen, denn jede Farbe f von ihnen muss neben den (ggf. existierenden) Stoffen 1-f und 2-f noch in mindestens einem weiteren Stoff vorkommen.

O.B.d.A. existiere der Stoff 3-4. Nun führen wir eine Fallunterscheidung danach durch, in welchen Stoffen die Farben 5 und 6 enthalten sind:

1. Fall: Es gibt den Stoff 5-6.

   Dann bilden die drei Stoffe 1-2, 3-4 und 5-6 eine gewünschte Auswahl von 3 Stoffen mit allen sechs Farben.

2. Fall: Es gibt den Stoff 5-6 nicht,

   aber die Farben 5 und 6 sind mit verschiedenen Farben aus $\{3, 4\}$ in einem Stoff verwoben. O.B.d.A. existieren also die Stoffe 3-5 und 4-6. Dann bilden die Stoffe 1-2, 3-5 und 5-6 eine entsprechende Stoffauswahl.

3. Fall: Die Farben 5 und 6 tauchen nur gemeinsam mit einer der beiden Fabren 3 oder 4 in einem Stoff auf,

   d.h., es gibt o.B.d.A. die Stoffe 3-5 und 3-6, aber weder 4-5, 4-6 noch 5-6. Damit existiert aber für jede der Farben 4, 5 und 6 jeweils nur eine weitere Farbe aus R, mit der sie gemeinsam in einem Stoff vorkommt. Demnach muss für jede dieser drei Farben f jeweils der Stoff 1-f als auch 2-f tatsächlich existieren, damit f in mindestens drei verschiedenen Stoffen vorkommt. Dann bilden die Stoffe 1-4, 2-5 und 3-6 eine gewünschte Auswahl.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 071236:

Gibt es unter den sechs Punkten vier, M, A, B und C so, dass M im Inneren des Dreiecks ABC liegt, dann zerlegen die Strecken MA, MB und MC den Vollwinkel bei M in drei Teilwinkel. Mindestens einer von diesen, o.B.d.A. $\angle AMB$ beträgt dann mindestens $\frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$ und mit dem Dreieck AMB ist ein gewünschtes gefunden.

Andernfalls befindet sich keiner der Punkte im Inneren der durch die sechs Punkte aufgespannten konvexen Figur. Damit, da keine drei Punkte auf einer Geraden liegen, muss es sich bei dieser Figur um ein konvexes Sechseck handeln. Dieses besitzt eine Innenwinkelsumme von $(6-2) \cdot 180° = 720°$, sodass mindestens einer der Innenwinkel mindestens $\frac{1}{6} \cdot 720° = 120°$ beträgt.

Das Dreieck, dass durch den Punkt, an dem dieser Innenwinkel liegt, sowie seinen beiden Nachbarn entsteht, erfüllt die gewünschte Eigenschaft.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972