7. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 071221:

Es seien x_k und y_k ganzrationale Zahlen, die die Bedingungen $0 \leqslant x_k \leqslant 2$ und $0 \leqslant y_k \leqslant 2$ erfüllen.

a) Ermitteln Sie die Anzahl aller (nicht entarteten) Dreiecke mit Eckpunkten $P_k(x_k; y_k)$, wobei x_k, y_k die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten von P_k bedeuten!

Anmerkung: Dabei gelten zwei Dreiecke Δ_1 und Δ_2 genau dann als gleich, wenn jede Ecke von Δ_1 auch Ecke von Δ_2 ist.

b) Geben Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke an!

Aufgabe 071222:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Gegeben seien gewisse Gegenstände, von denen jeder eine bestimmte Farbe und eine bestimmte Form hat. Wenn es unter diesen Gegenständen zwei von verschiedener Farbe und zwei von verschiedener Form gibt, dann befinden sich unter den Gegenständen mindestens zwei solche, die sich sowohl in der Farbe als auch in der Form unterscheiden.

Aufgabe 071223:

Beweisen Sie, daß für alle nicht negativen reellen Zahlen a, b, c

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 071224:

Beweisen Sie, daß das Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein kann!

Aufgabe 071225:

Es sind alle geordneten Paare reeller Zahlen (x, y) anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x \cdot (ax^2 + by^2 - a) = 0 \qquad (1)$$
$$y \cdot (ax^2 + by^2 - b) = 0 \qquad (2)$$

erfüllt ist. Dabei sind a und b reelle Zahlen mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $a \neq b$.

Aufgabe 071226:

Gegeben sei eine regelmäßige sechsseitige Pyramide. Man lege einen ebenen Schnitt durch die Pyramide, der durch die Mittelpunkte zweier nicht benachbarter und nicht paralleler Seiten der Grundfläche und durch den Mittelpunkt der Höhe der Pyramide verläuft.

Es ist das Verhältnis des Flächeninhalts der dabei entstehenden Schnittfigur und des Flächeninhalts einer Seitenfläche der Pyramide zu ermitteln.

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 071221:

a) Es gibt insgesamt 9 Paare (x, y) "ganzrationaler" (= ganzer) Zahlen mit $0 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 2$, also 9 Punkte $P(x, y)$ mit ganzzahligen Koordinaten $x, y \in \{0, 1, 2\}$.

Es gibt $\binom{9}{3} = 84$ Möglichkeiten, 3 dieser 9 Punkte auszuwählen. Dabei liegen jedoch in 8 Fällen die 3 Punkte auf einer Geraden (entweder parallel zur x- oder y-Achse oder auf einer der Diagonalen $y = x$ oder $y = 3 - x$.

Somit bilden in 84 - 8 = 76 Fällen die drei Punkte ein nicht-entartetes Dreieck.

b) Es gibt 8 Klassen von Dreiecken, wobei die Dreiecke einer Klasse zueinander kongruent sind. Nämlich:

Klasse	Repräsentant	Anzahl	Flächeninhalt
1.	(0,0), (0,1), (1,0)	16	1/2
2.	(0,0), (0,1), (1,2)	16	1/2
3.	(0,0), (0,1), (2,0)	16	1
4.	(0,0), (0,1), (2,2)	8	1
5.	(0,0), (0,2), (1,2)	8	1
6.	(0,0), (0,2), (2,0)	4	2
7.	(0,0), (0,2), (2,1)	4	2
8.	(0,0), (1,2), (2,1)	4	3/2
Summe:		76	

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 071222:

Anmerkung:

In dieser Lösung wird angenommen, dass die Menge der Gegenstände endlich sei, was in der Olympiade Punktabzug bringen könnte. In der zweiten Lösung wurde so eine Annahme nicht getroffen.

Seien die verschiedenen Formen beliebig als Form 1, Form 2, ... und die verschiedenen Farben beliebig mit Farbe 1, Farbe 2, .. bezeichnet. Aussage bezeichne im Folgenden die zu zeigende Aussage der Aufgabenstellung.

Angenommen, es gäbe alle Formen in allen Farben. Dann zeigen Form 1 mit Farbe 1 und Form 2 mit Farbe 2 (beide existieren nach Voraussetzung) die zu zeigende Aussage.

Angenommen, es gäbe die Form i in allen Farben und Form j nicht in Farbe k (welche zur Menge der vorkommenden Farben gehöre). Dann zeigen Form i in Farbe k und Form j in einer anderen Farbe die Aussage.

Analog wäre die Aussage gezeigt, wenn es eine Farbe gibt, sodass alle Formen diese Farbe haben.

Nun nehmen wir an, dass es keine Form gibt, die in jeder Farbe vorkommt, und keine Farbe, welche alle Formen haben.

Betrachte eine Form i, welche eine minimale Anzahl von Farben (größer gleich 1) aufweist, eine dieser Farben sei Farbe k. Betrachte die Form j, welche nicht in Farbe k vorkommt. Wegen der Minimalität (bezüglich der Anzahl der Farben) von Form i muss Form j nun in einer Farbe l vorkommen, in welcher Form i nicht vorkommt.

Form i mit Farbe k und Form j in Farbe l zeigen die Aussage.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

2. Lösungsweg:

Es bezeichne $f(x)$ die Farbe und $g(x)$ die Form eines Gegenstands x. Nach Voraussetzung gibt es a und b mit $f(a) \neq f(b)$. Ist $g(a) \neq g(b)$, so haben wir die gesuchten Gegenstände gefunden, und wir sind fertig.

Anderenfalls gilt $g(a) = g(b)$, und wir betrachten zwei Gegenstände c und d mit $g(c) \neq g(d)$. Ist $f(c) \neq f(d)$, sind wir wieder fertig, da zwei Gegenstände mit den gesuchten Eigenschaften gefunden sind, nämlich c und d. Andernfalls gilt $f(c) = f(d)$. Da $f(a) \neq f(b)$, kann nicht gleichzeitig $f(c) = f(d) = f(a)$ und $f(c) = f(d) = f(b)$ gelten.

Sei also etwa $f(c) = f(d) \neq f(a)$. Ebenso kann nicht gleichzeitig $g(a) = g(c)$ und $g(a) = g(d)$ gelten. Sei also etwa $g(a) \neq g(c)$. Dann ist also $f(a) \neq f(c)$ und $g(a) \neq g(c)$, und die beiden Gegenstände sind gefunden.

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 071223:

Die Umordnungsungleichung besagt insbesondere, dass für beliebige reelle Zahlen $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ und $y_1 \geq y_2 \geq y_3$ gilt:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \geq x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$$

und

$$x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 \geq x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1.$$

Falls eine der Zahlen a, b, c Null ist, dann ist

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$$

erfüllt, denn es steht auf der linken Seite eine nichtnegative Zahl und auf der rechten Seite 0.

Seien also a, b, c positiv. Da die zu beweisende Ungleichung symmetrisch in a, b, c ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $a \geq b \geq c$. Nach Division durch $\sqrt{abc}$ auf beiden Seiten bleibt zu zeigen, dass

$$\frac{a^{2,5}}{\sqrt{bc}} + \frac{b^{2.5}}{\sqrt{ac}} + \frac{c^{2.5}}{\sqrt{ab}} \geq a^{1.5} + b^{1.5} + c^{1.5}$$

gilt. Wegen $a^{2.5} \geq b^{2.5} \geq c^{2.5}$ und $\frac{1}{\sqrt{bc}} \geq \frac{1}{\sqrt{ac}} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}$ gilt also nach Umordnungsungleichung

$$\begin{aligned}\frac{a^{2,5}}{\sqrt{bc}} + \frac{b^{2.5}}{\sqrt{ac}} + \frac{c^{2.5}}{\sqrt{ab}} &\geq \frac{a^{2,5}}{\sqrt{ac}} + \frac{b^{2.5}}{\sqrt{ab}} + \frac{c^{2.5}}{\sqrt{bc}} \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a}} + \frac{c^2}{\sqrt{b}}\end{aligned}$$

Wegen $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ und $\frac{1}{\sqrt{c}} \geq \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$ gilt nach Umordnungsungleichung

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\sqrt{c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a}} + \frac{c^2}{\sqrt{b}} &\geq \frac{a^2}{\sqrt{a}} + \frac{b^2}{\sqrt{b}} + \frac{c^2}{\sqrt{c}} \\ &= a^{1.5} + b^{1.5} + c^{1.5}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon

Lösung 071224:
Jedes in der Aufgabe genannte Produkt hat die Form

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$$

wobei n eine positive ganze Zahl ist. Da

$$(n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 < (n^3 + 3n + 1)^2$$

gilt, liegt $n(n+1)(n+2)(n+3)$ zwischen den Quadraten von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen, nämlichen denen von $n^2 + 3n$ und $n^2 + 3n + 1$ und kann daher selbst nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 071225:
Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x = 0$.

   Dann geht die zweite Gleichung über in $y \cdot b \cdot (y^2 - 1) = 0$, was wegen $b \neq 0$ auf $y = 0$ oder $y = \pm 1$ führt. Für alle drei Elemente $(x, y) \in \{(0, -1), (0, 0), (0, 1)\}$ bestätigt die Probe, dass es sich tatsächlich um Lösungen des Gleichungssystems handelt.

2. Fall: $x \neq 0$.

   Dann folgt aus der ersten Gleichung $ax^2 + by^2 - a = 0$, also aufgrund $a \neq b$ damit $ax^2 + by^2 - b \neq 0$, sodass aus aus der zweiten Gleichung direkt $y = 0$ folgt. Dies in die eben erhaltene Gleichung eingesetzt, liefert $ax^2 - a = 0$ bzw. $x = \pm 1$. Auch hier sind wieder alle Elemente der Menge $\{(-1, 0), (1, 0)\}$ Lösungen des Gleichungssystems, wie die Probe bestätigt.

Damit hat das angegebene Gleichungssystem insgesamt fünf Lösungen, die in den beiden Fällen notiert wurden.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

2. Lösungsweg:

Es muss $xy = 0$ sein, da andernfalls die Klammerausdrücke in den zwei gegebenen Gleichungen 0 wären, was dann sofort auf den Widerspruch $a = b$ führen würde.

Durch Ausmultiplizieren der Gleichungen, Einsetzen von $xy = 0$ und Kürzen durch a bzw. b ergibt sich dann, dass das gegebene Gleichungssystem äquivalent ist zu einem anderen, in dem a und b dann gar nicht mehr vorkommen, nämlich

$$xy = 0, \quad x^3 = x, \quad y^3 = y$$

mit den 5 offensichtlichen Lösungen $(x, y) \in \{(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}$.

Aufgeschrieben und gelöst von weird

Lösung 071226:

Die Eckpunkte der Grundfläche seien in der Reihenfolge mit P_1 bis P_6 bezeichnet sowie die Spitze der Pyramide mit S und der Mittelpunkt der Grundfläche mit F. Dann ist auch F der Fußpunkt der Höhe von S auf die Grundfläche, da von einer geraden Pyramide ausgegangen wird.

(Sonst könnte man nicht vom Flächeninhalt "einer" Seitenfläche der Pyramide sprechen, da sie unterschiedliche Flächeninhalte haben könnten, wäre die Pyramide nicht gerade.)

Schließlich sei M der Mittelpunkt der Strecke FS, also der Mittelpunkt der Höhe der Pyramide und ϵ die Ebene des zu betrachtenden Schnitts.

Der Schnitt verlaufe durch die Mittelpunkte M_1 und M_3 der Seiten P_1P_2 und P_3P_4, die weder benachbart noch parallel sind. Insbesondere ist dann also die Gerade durch die Diagonale P_1P_4 des Sechsecks parallel zur Schnittebene ϵ.

Sei weiterhin $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ das Sechseck, welches als Schnitt der Pyramide mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene durch den Mittelpunkt M der Höhe entsteht, wobei jeder Punkt Q_i auf der Gerade SP_i liege. Da ϵ erstens durch M, welcher gleichzeitig Mittelpunkt dieses zweiten Sechsecks ist, verläuft, zweitens parallel zu P_1P_4 ist und drittens nach dem Strahlensatz die Geraden P_1P_4 und Q_1Q_4 parallel sind, muss die Strecke Q_1Q_4, die M als eigenen Mittelpunkt enthält, in ϵ liegen. Somit schneidet ϵ also die Geraden P_1S und P_4S in Q_1 bzw. Q_4.

Analog sei das Sechseck $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ als Schnitt der Pyramide mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene in Höhe von $\frac{3}{4}|SF|$ definiert, wobei wieder die Punkte R_i auf den Geraden SP_i liegen sollen. Der Schnitt von ϵ mit dieser zur Grundfläche parallelen Ebene liefert wieder eine Gerade, die parallel zu R_1R_4 ist.

Sei d der Abstand der parallelen Geraden P_1P_4 und P_5P_6. Dann beträgt nach dem Strahlensatz der Abstand der parallelen Geraden R_1R_4 und R_5R_6 genau $\frac{1}{4}d$.

Der Abstand des Schnitts von ϵ mit der Grundfläche, also der Geraden M_1M_3, hat einen Abstand $\frac{1}{2}d$ von der dazu parallelen Gerade P_1P_4. Und in der zu Grundfläche parallelen Ebene durch M (also in Höhe $\frac{1}{2}|SF|$ über der Grundfläche) ist der Schnitt von ϵ mit dieser Ebene identisch mit der Geraden R_1R_4, sodass der entsprechende Abstand Null beträgt.

Daher gilt nach Strahlensatz (mit Zentrum M in Höhe $\frac{1}{2}|SF|$ über der Grundfläche), dass der Schnitt von ϵ mit der zur Grundfläche parallelen Ebene in Höhe $\frac{3}{4}|SF|$ genau den Abstand $\frac{1}{4}d$ zur entsprechenden parallelen Gerade R_1R_4 hat. Da weiterhin diese Schnittgerade von ϵ mit der gerade betrachteten Ebene in der von R_1R_4 erzeugten Halbebene liegt, in der nicht R_2 und R_3 liegen; in der im gleichen Abstand zu R_1R_4 aber der Gerade R_5R_6 verläuft, muss also der Schnitt von ϵ mit dieser Ebene gerade die Gerade R_5R_6 sein. Damit schneidet ϵ die Geraden SP_5 und SP_6 in R_5 bzw. R_6.

Die entstehende Schnittfigur beim Schnitt von ϵ mit der sechsseitigen Pyramide ist demnach genau das Sechseck $M_1M_3Q_4R_5R_6Q_1$. Dieses lässt sich zerlegen in die beiden Trapeze $M_1M_3Q_4Q_1$ und $Q_1Q_4R_5R_6$, deren Flächeninhalte – in Abhängigkeit der Kantenlänge a des Sechsecks der Grundfläche und der Höhe $h = |SF|$ der Pyramide – im Folgenden ermittelt werden:

Sei P_0 der Schnittpunkt der Geraden P_1P_2 und P_3P_4 und es entsteht das gleichseitige Dreieck $\triangle P_2P_0P_3$. Dann gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|P_0M_1|}{|P_0P_2|} = \frac{|M_1M_3|}{|P_2P_3|}$, also $|M_1M_3| = \frac{3}{2}a$. Analog folgt auch $|P_1P_4| = 2a$. Aus letzterem folgt mittels Strahlensatz (mit Zentrum S), dass $|Q_1Q_4| = \frac{1}{2}|P_1P_4| = a$ gilt. Damit kennen wir die Längen der parallelen Strecken im Trapez $M_1M_3Q_4Q_1$.

Für den Abstand dieser beiden Parallelen betrachten wir das rechtwinklige Dreieck bestehend aus M, F und dem Mittelpunkt N der Strecke M_1M_3, wobei der rechte Winkel bei F liegt. Es ist $|MF| = \frac{1}{2}|SF| = \frac{1}{2}h$. Für die Streckenlänge $|FN|$ gilt, dass die Strecke die halbe Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_2P_3F$ ist, also

$|FN| = \frac{\sqrt{3}}{4}$ folgt. Damit beträgt der Abstand der beiden Geraden M_1M_3 und Q_1Q_4 genau

$$h_1 := |NM| = \sqrt{|MF|^2 + |FN|^2} = \sqrt{\frac{1}{4}h^2 + \frac{3}{16}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Der Flächeninhalt des Trapezes $M_1M_3Q_4Q_1$ ergibt sich damit zu

$$A_1 := \frac{1}{2} \cdot (|M_1M_3| + |Q_1Q_4|) \cdot h_1 = \frac{5}{16}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Für die Bestimmung des Flächeninhalts des Trapezes $Q_1Q_4R_5R_6$ beachte man, dass aufgrund des Strahlensatzes (mit Zentrum S) $|R_5R_6| = \frac{1}{4}|P_5P_6| = \frac{1}{4}a$ und (mit Zentrum M) $h_2 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{8}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$ gilt, wobei h_2 der Abstand der Parallelen Q_1Q_4 und R_5R_6 ist. Also ergibt sich für dieses Trapez der Flächeninhalt zu

$$A_2 := \frac{1}{2}(|Q_1Q_4| + |R_5R_6|) \cdot h_2 = \frac{5}{64}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2} = \frac{1}{4}A_1$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt A der gesamten Schnittfigur zu

$$A := A_1 + A_2 = \frac{5}{4} \cdot A_1 = \frac{25}{64}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Um den Flächeninhalt der Seitenfläche $\triangle P_1P_2S$ (und damit jeder Seitenfläche) der Pyramide zu bestimmen, benötigen wir die Länge ihrer Seitenhöhe h_s. Diese ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $\triangle SFM_1$ mit rechtem Winkel bei F. Es ist FM_1 die Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_1P_2F$, sodass $|FM_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ gilt. Also ist $|SF| = h$, also

$$h_s = |M_1S| = \sqrt{|SF|^2 + |FM_1|^2} = \sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Daraus ergibt sich nun der Flächeninhalt A_S einer Seitenfläche der Pyramide zu $A_S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{4}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$ und damit für den Flächeninhalt Schnittfigur

$$A = \frac{25}{16} \cdot A_S$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972