7. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 071211:

Vier Personen A, B, C, D legten gemeinsam eine positive ganze Zahl fest. Jeder der vier gibt über diese Zahl die folgenden drei Auskünfte, von denen jeweils mindestens eine wahr und mindestens eine falsch ist:

A: 1. Die Zahl ist durch 4 teilbar;
2. sie ist durch 9 teilbar;
3. das 11fache der Zahl ist kleiner als 1 000.

B: 1. Die Zahl ist durch 10 teilbar;
2. sie ist größer als 100;
3. das 12fache der Zahl ist größer als 1 000.

C: 1. Die Zahl ist eine Primzahl;
2. sie ist durch 7 teilbar;
3. sie ist kleiner als 20.

D: 1. Die Zahl ist nicht durch 7 teilbar;
2. sie ist kleiner als 12;
3. das 5fache der Zahl ist kleiner als 70.

Wie lautet die Zahl?

Aufgabe 071212:

Die Rentabilität des Einsatzes von Rohbraunkohle oder Braunkohlenbriketts wird auch durch die Transportkosten beeinflußt. Die folgende Tabelle zeigt die Kosten (in M je Mill. kcal) einschließlich der Transportkosten für Rohbraunkohle bzw. Braunkohlenbriketts, und zwar für Transportentfernungen von 0 km, 100 km und 200 km.

Transportentfernung	Kosten in M je Mill. kcal	
in km	Rohbraunkohle	Braunkohlenbriketts
x	y	z
0	4,0	8,0
100	8,6	9,2
200	12,1	10,0

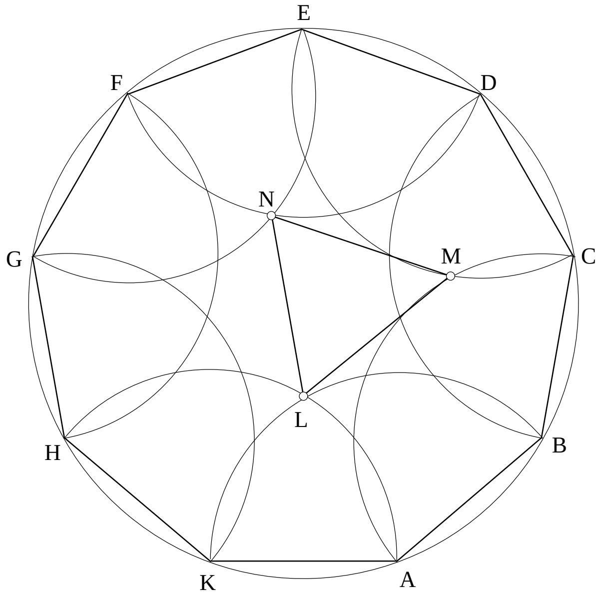
Allgemein lassen sich die Kosten für die Entfernungen bis etwa 400 km durch eine Funktion vom Typ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ darstellen.

Ermitteln Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 in beiden Fällen! Entscheiden Sie, für welche Transportentfernungen bis 400 km der Einsatz von Rohbraunkohle billiger ist!

Aufgabe 071213:

Die Abb. zeigt ein regelmäßiges Neuneck mit seinem Umkreis. Um die Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H und K dieses Neunecks sind in der aus der Abb. ersichtlichen Weise Kreisbögen gezeichnet, deren Radien ebenso lang wie die Neuneckseiten sind.

Untersuchen Sie, ob die in der Figur mit L, M und N bezeichneten Schnittpunkte dieser Kreisbögen Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind!



Aufgabe 071214:

Zur Verfügung stehen eine Holzkugel, ein Zirkel, mit dem man sowohl auf einer (genügend groß gedachten) ebenen Fläche als auch auf der Kugeloberfläche zeichnen kann, Bleistift, ein starr geradliniges (ohne Längenskale) Lineal und (ebenes) Zeichenpapier.

Man konstruiere den Radius der Holzkugel!

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 071311:

Zur Abkürzung bezeichnen wir die gegebenen Auskünfte mit A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 u.s.w. Wir untersuchen zunächst die Auskünfte C_1, C_2, C_3. Von ihnen ist mindestens eine wahr und mindestens eine falsch. Es ergeben sich also die in der folgenden Tafel aufgeführten sechs Fälle, wobei jeweils zur Abkürzung eine wahre Aussage mit W und eine falsche mit F bezeichnet wird:

	1	2	3	4	5	6
C_1	W	W	W	F	F	F
C_2	W	F	F	W	W	F
C_3	F	W	F	W	F	W

1. Sind C_1 und C_2 wahr, so ist die gedachte Zahl z eine durch 7 teilbare Primzahl, also $z = 7$. Dann ist auch C_3 wahr, was der Voraussetzung widerspricht. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

2. Sind C_1 und C_3 wahr und ist C_2 falsch, so ist z eine nicht durch 7 teilbare Primzahl und $z > 20$. Dann sind die Auskünfte B_1, B_2 und B_3 sämtlich falsch, was der Voraussetzung widerspricht, so daß auch dieser Fall nicht eintreten kann.

3. Ist C_1 wahr und sind C_2 und C_3 falsch, so ist z Primzahl und $z \geq 20$. Dann sind A_1 und A_2 falsch, also A_3 wahr, d.h. $11z < 1000$, $z \leq 90$. Daher sind ferner B_1 und B_2 falsch, also B_3 wahr, d.h. $12z > 1000$, $z \geq 84$.

   Nun ist unter den Zahlen 84, 85, ..., 90 nur die Zahl 89 eine Primzahl, es ist also $z = 89$. Man überzeugt sich zum Abschluß davon, daß dann D_1 wahr und D_2 und D_3 falsch sind, daß also alle Bedingungen erfüllt sind.

4. Sind C_2 und C_3 wahr und ist C_1 falsch, so ist $z = 14$. Dann sind D_1, D_2 und D_3 falsch, so daß dieser Fall nicht eintreten kann.

5. Ist C_2 wahr und sind C_1 und C_3 falsch, so ist $z \geq 20$ und z durch 7 teilbar. Dann sind aber D_1, D_2, D_3 falsch, so daß auch dieser Fall nicht eintreten kann.

6. Sind C_1 und C_2 falsch und ist C_3 wahr, so ist $z < 20$, z nicht Primzahl und nicht durch 7 teilbar. Dann sind B_2, B_3 falsch und B_1 wahr, also $z = 10$.

   Dann sind D_1, D_2, D_3 wahr, so daß auch dieser Fall nicht eintreten kann.

Daher entspricht nur der 3. Fall allen gestellten Bedingungen. Die zu ermittelnde Zahl ist 89.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 071312:

(a) Ermittelt werden sollen die Kostenfunktionen $f_1(x)$ für Rohbraunkohle und $f_2(x)$ für Braunkohlenbriketts.

Für Rohbraunkohle gelten die Beziehungen:

$$f_1(0) = 4$$
$$f_1(100) = \frac{43}{5}$$
$$f_1(200) = \frac{121}{10}$$

Dadurch ist das Polynom 2-ten Grades vollständig bestimmt, und es gilt:

$$f_1(x) = 4 + \frac{103}{2000}x - \frac{11}{200000}x^2$$

Für Braunkohlebriketts gelten die Beziehungen:

$$f_2(0) = 8$$
$$f_2(100) = \frac{46}{5}$$
$$f_2(200) = 10$$

Dadurch ist das Polynom 2-ten Grades vollständig bestimmt, und es gilt:

$$f_2(x) = 8 + \frac{7}{500}x - \frac{1}{50000}x^2$$

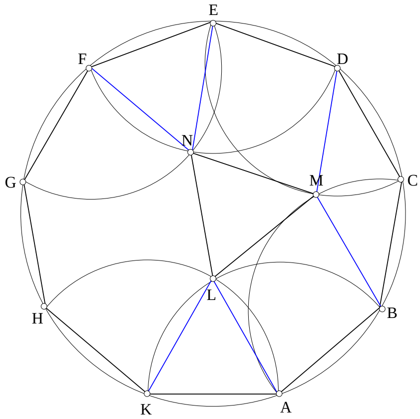
(b) Gesucht sind die Entfernungen, in denen Rohbraunkohle günstiger ist und umgekehrt. Die markanten Entfernungen sind die, für die $f_1(x) = f_2(x)$ gilt. Diese quadratische Gleichung hat die positiven Lösungen

$$x_1 = \frac{3750 - 50\sqrt{3385}}{7} \approx 120 \quad \text{und}$$
$$x_2 = \frac{3750 + 50\sqrt{3385}}{7} \approx 951$$

Bei rund 120km sind beide Preise gleich (der zweite Wert entfällt, da er außerhalb der zu betrachtenden 400km Entfernung liegt). In der Tabelle steht, daß bei 0 km die Rohbraunkohle billiger sei, also ist bis zu einer Entfernung von etwa 120km Rohbraunkohle vorzuziehen, während danach Braunkohlebriketts billiger werden.

Aufgeschrieben und gelöst von Daniel Gutekunst

Lösung 071313:



Sei $a = \overline{AB} = \overline{BC} = \dots$ die Kantenlänge des regelmäßigen 9-ecks, und sei S_{XY} der Schnittpunkt der Kreisbogen um X und Y mit dem Radius a. Ferner beträgt jeder Innenwinkel $\frac{7}{9} \cdot 180° = 140°$.

Es ist $M = S_{BD}$, also $a = \overline{MB} = \overline{MD} = \overline{BC} = \overline{DC}$. Damit ist $BCDM$ eine Raute (=Rhombus) und $\sphericalangle BMD = \sphericalangle BCD = 140°$.

Es ist $N = S_{FE}$ und $L = S_{KA}$, woraus die gleichseitigen Dreiecke $\triangle NFE$ und $\triangle LKA$ entstehen. Insbesondere ist $a = \overline{AL} = \overline{EN}$.

In der Raute gilt $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MDC = (360° - 2 \cdot 140°)/2 = 40°$. Damit ist $\sphericalangle MDE = \sphericalangle MBA = 100°$. Außerdem ist $\sphericalangle LAB = \sphericalangle NED = 140° - 60° = 80°$.

Die Strecken $\overline{AL}$ und $\overline{BM}$ sind parallel, da sie gleiche Winkel zur Geraden durch A und B haben. Die Strecken $\overline{EN}$ und $\overline{DM}$ sind parallel, da sie gleiche Winkel zur Geraden durch E und D haben.

Es folgt, dass $EDMN$ und $ABML$ kongruente Rauten sind, insbesondere ist $\overline{ML} = \overline{MN}$. Ebenfalls folgt $\sphericalangle LMB = \sphericalangle NMD = \sphericalangle LAB = \sphericalangle NED = 80°$. Schließlich ist dann $\sphericalangle LMN = 360° - \sphericalangle LMB - \sphericalangle NMD - \sphericalangle BCD = 60°$.

Daraus folgt, dass $\triangle LMN$ gleichseitig ist (was zu zeigen war).

Aufgeschrieben und gelöst von Daniel Gutekunst

Lösung 071314:

Man kann die Kugel zunächst auf einem Blatt (auf dem der Radius zu konstruieren ist) positionieren.

Danach kann man das Lineal senkrecht zum Boden an die Kugel heranstellen (ein Lineal hat rechte Winkel) und am unteren Ende des Lineals mit dem Bleistift eine Markierung machen. Das wiederholt man noch 2 mal mit anderen Punkten an der Kugel.

Nun hat man auf dem Papier 3 Punkte, die auf dem größten in die Kugel passenden Kreis liegen. Verbindet man die 3 Punkte, erhält man ein Dreieck, bei dem man wiederum den Umkreis (selber Radius wie Kugel) konstruieren kann.

Man verbindet also die 3 Punkte mit dem Lineal und konstruiert mit dem Zirkel die 3 Mittelsenkrechten, deren Schnittpunkt der Umkreismittelpunkt ist. Man nimmt nun diesen Mittelpunkt und einen Eckpunkt des Dreiecks in die Zirkelspanne und kann sie auf eine Gerade abtragen und erhält so den Radius.

Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht darin, den Zirkel an einen beliebigen Punkt der Kugel zu halten und mit dem anderen Zirkelende so lange auf der Kugel entlangwandert, bis dieses gerade noch so an der Kugel anliegt und bei weiterem "Wandern" in beliebiger Richtung die Kugeloberfläche verlassen würde. Dann hat man den Kugeldurchmesser in der Zirkelspanne.

Zugegebenermaßen sind diese beiden Verfahren recht ungenau. Man kann auch mit folgendem Verfahren vorankommen, indem die Kugel als Kreis auf die Papierfläche projeziert werden soll:

1. Man wählt einen beliebigen Punkt B auf der Kugeloberfläche
2. Es wird ein Kreis k um B auf der Kugeloberfläche gezeichnet. Die Zirkelspanne sei dabei r_1. Achtung: der gezeichnete Kreis hat nicht den Radius r_1!
3. Auf dem Blatt wird eine waagerechte Linie w gezeichnet, auf der ein Punkt B^* festgelegt wird. Um B^* wird ein Kreis mit dem Radius r_1 gezeichnet.

4. Nun wird auf dem Kreis k auf der Kugel ein beliebiger Punkt A gewählt. Den Durchmesser d_k dieses Kreises kann man mit dem Zirkel ermitteln, indem man ihn in A sticht und den maximalen Abstand sucht.

5. Mittels einer Grundkonstruktion auf dem Papier kann d_k halbiert werden.

6. Auf w wird eine Senkrechte konstruiert und von dem Schnittpunkt $\frac{d_k}{2}$ jeweils nach unten und nach oben abgetragen. Es entsteht eine Strecke, die so lange auf w parallelverschoben wird, bis sie den Kreis mit dem Radius r_1 trifft. Einer dieser Schnittpunkte sei A^* genannt.

7. Abschließend wird die Mittelsenkrechte von A^* und B^* konstruiert. Ihr Schnittpunkt mit w heiße M^*. Die Strecke $\overline{B^*M^*}$ bzw. $\overline{A^*M^*}$ entspricht nun dem Radius der Kugel.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag