7. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070821:

Errichtet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecke die Quadrate nach außen, so bilden die äußeren Eckpunkte der Quadrate die Ecken eines konvexen Sechsecks. Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecke mit A_3; den jedes der Quadrate mit A_4 und den des Sechsecks mit A_6.

Gesucht sind ganze Zahlen n und m so, daß die Gleichung $A_6 = nA_3 + mA_4$ gilt.

Aufgabe 070822:

Gegeben sind ein Kreis k (Mittelpunkt M, Radius der Länge $r = 6$ cm) und ein Kreis k_1 (Mittelpunkt M_1, Radius der Länge $r_1 = 2$ cm). Beide Kreise berühren einander von außen.

Konstruiere alle Kreise mit dem Radius der Länge 2 cm, die die beiden gegebenen Kreise berühren!

Konstruiere auch die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit den gegebenen!

Aufgabe 070823:

Jemand würfelte mit n Würfeln bei einem einzigen Wurfe zusammen die Augenzahl $3n + 4$, und zwar zeigte dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl.

Man ermittle sämtliche Werte von n, für die das möglich ist!

Aufgabe 070824:

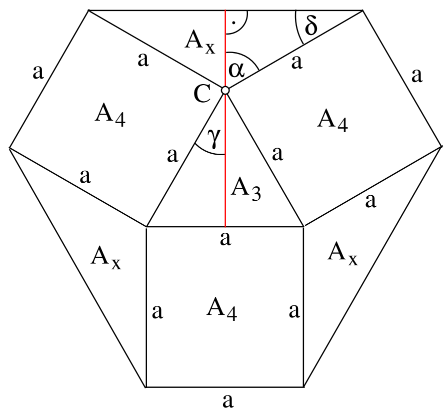
Beweise den Satz: Unter n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ($n \geq 2$) gibt es stets eine, die durch n teilbar ist.

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 070821:

In der nebenstehenden Zeichnung sieht man, dass sich der Flächeninhalt des Sechsecks A_6 wie folgt zusammensetzt (der Flächeninhalt A_x bezeichnet dabei die Fläche des Dreiecks zwischen den Quadraten wie in der Zeichnung ersichtlich):



$$A_6 = A_3 + 3 \cdot A_4 + 3 \cdot A_x \tag{1}$$

Die rot eingezeichneten Linien teilen die Dreiecke A_3 und A_x in sämtlich zueinander kongruente Dreiecke mit einem rechten Winkel, einer Hypotenuse der Größe a und einem weiteren gleichgroßen Winkel γ. Letzteres kann wie folgt begründet werden: um den Punkt C setzt sich der Vollwinkel ($= 360°$) aus zwei Winkeln zu je $90°$ (in den Quadraten) sowie je zwei Winkel $\gamma = 30°$ und α zusammen, d.h. $\alpha + \gamma = 90°$ bzw. in dem Dreieck mit α gilt demzufolge $\delta = \gamma$.

Damit und mit der Flächeninhaltsformel eines gleichseitigen Dreiecks gilt:

$$A_3 = A_x = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \tag{2}$$

Ferner gilt für das Quadrat:

$$A_4 = a^2 \tag{3}$$

Mit (2) und (3) in (1) eingesetzt ergibt sich: $A_6 = 4 \cdot A_3 + 3 \cdot A_4$ woraus sich $n = 4$ und $m = 3$ als mögliche Lösung zeigt.

Anmerkung: Diese Aufgabe hätte unendlich viele Lösungen, wenn die Einschränkung der Ganzzahligkeit von n und m zurückgenommen wird, wie man durch folgende weitere Überlegungen sieht:

$$\begin{aligned} A_6 &= 4 \cdot A_3 + 3 \cdot A_4 \\ n \cdot A_3 + m \cdot A_4 &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 3 \cdot a^2 \\ \left(n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + m\right) \cdot a^2 &= \left(\sqrt{3} + 3\right) \cdot a^2 \\ n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + m &= \sqrt{3} + 3 \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{3} + 3 - n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070822:

(I) Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen entweder (1) auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r + r_1$ oder (1') auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r - r_1$ da sie k berühren sollen, und (2) auf dem Kreis um M_1 mit dem Radius der Länge $r_1 + r_2$, da sie k_1 berühren sollen und denselben Radius haben wie k_1.

Anmerkung: Falls ein Schüler auch zwei zusammenfallende Kreise als einander berührend bezeichnet und hierdurch zu dem Ergebnis kommt, auch k_1 als vierte Lösung anzugeben, so kann eine solche Angabe (bei sonst richtiger Formulierung) als richtig gewertet werden, da die Aufgabenstellung diese Deutung nicht ausdrücklich ausschließt.

(II) Daher ergeben sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise als Schnittpunkte der Kreise nach (1) und (2) (das sind 2 Schnittpunkte) und als Berührungspunkt der Kreise nach (1') und (2). Dieser Punkt liegt auf der Verbindungsgeraden durch M und M_1.

Die Berührungspunkte der Kreise erhält man, wenn man die Mittelpunkte der sich berührenden Kreise miteinander verbindet.

Es gibt genau 3 Kreise, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. (Der Beweis folgt aus (I).)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 070823:

Die Augenzahl $3n + 4$ muß durch n teilbar sein.

$\frac{3n+4}{n} = 3 + \frac{4}{n}$ liefert nur für n als Teiler von 4, also nur für $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$ ganzzahlige Ergebnisse.

$n = 1$ scheidet aus, da keine 7 gewürfelt werden kann.

Für $n = 2$ erhält man 10 Augen, d.h., es wurde zweimal eine 5 gewürfelt.

Für $n = 4$ ergeben sich 16 Augen, d.h., es wurde viermal eine 4 gewürfelt.

Es wurde also entweder mit 2 oder mit 4 Würfeln gewürfelt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 070824:

Wir bezeichnen die größte der n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit g.

Sie lasse bei der Division durch n den Rest r mit $0 \leq r \leq n - 1$, es gelte also $g = q \cdot n + r$ (q ganzzahlig).

Daher gehört die durch n teilbare Zahl $g - r$ zu den n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission