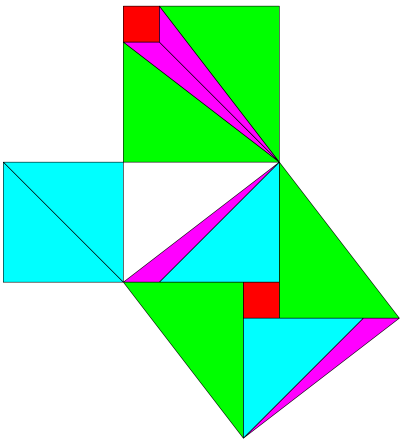
7. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen



7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070811:

Drei Schüler einer Klasse, Thomas (T), Rainer (R) und Bernd (B), hatten sich bei einem Sportfest für den Endkampf im Hochsprung qualifiziert und eroberten dort die ersten drei Plätze. Klaus, der in einer anderen Disziplin starten mußte, erkundigte sich später bei Elke nach dem Ausgang beim Hochsprung. Diese konnte sich nicht mehr genau entsinnen und sagte:

> ”Thomas wurde nicht Erster, Rainer nicht Zweiter, aber Bernd wurde Zweiter.”

Später stellte sich heraus, daß Elke einmal etwas Richtiges gesagt, sich aber in den beiden anderen Fällen geirrt hatte. Außerdem ist bekannt, daß alle drei Schüler unterschiedliche Höhen übersprangen.

Welcher Schüler wurde Erster, Zweiter, Dritter?

Aufgabe 070812:

Bei welchem Massenverhältnis von 10 prozentiger und 30 prozentiger Salzlösung erhält man nach Mischung 25 prozentige Salzlösung? (Die Prozentangaben sind auf die Masse bezogen.)

Aufgabe 070813:

Drei Sportler starteten gleichzeitig und liefen 100 m. Als der erste am Ziel war, hatte der zweite noch genau 10 m zu laufen. Als der zweite am Ziel war, blieben für den dritten noch genau 10 m.

Wie weit war der dritte noch vom Ziel entfernt, als der erste dieses erreicht hatte? (Es sei angenommen, daß jeder der drei Sportler die gesamte Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlief.)

Aufgabe 070814:

Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Länge ρ des Inkreisradius bekannt. Das Dreieck ist unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zu konstruieren!

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 070811:

Die drei Aussagen kann man mit der Schreibweise Thomas (T), Rainer (R) und Bernd (B) wie folgt darstellen:

$$T \neq 1 \quad (1)$$
$$R \neq 2 \quad (2)$$
$$B = 2 \quad (3)$$

Wenn Elke genau eine Aussage korrekt und genau zwei falsch gemacht hat, dann müssen folgende drei Fälle unterschieden werden:

1.Fall: (1) ist richtig und (2), (3) sind falsch:

(1*) $T \neq 1$

(2*) $R = 2$

(3*) $B \neq 2$

Aus (1*) und (2*) folgt (4*) $T = 3$. Daraus folgt (5*) $B = 1$. Alle drei Aussagen (1*), (2*), (3*) sind erfüllt.

2.Fall: (2) ist richtig und (1), (3) sind falsch:

(1*) $T = 1$

(2*) $R \neq 2$

(3*) $B \neq 2$

Aus (1*), (2*) und (3*) folgt, dass niemand Zweiter sein kann. Dies ist ein Widerspruch, daher ist der Fall nicht erfüllbar.

3.Fall: (3) ist richtig und (1), (2) sind falsch:

(1*) $T = 1$

(2*) $R = 2$

(3*) $B = 2$

Aus (2*) und (3*) folgt, dass es zwei Zweite gibt. Dies ist ein Widerspruch, daher ist der Fall nicht erfüllbar.

Demzufolge gibt es exakt eine Lösung: Bernd war Erster, Rainer Zweiter und Thomas Dritter.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070812:

Eine 10-, 30- und 25-%ige Salzlösung a, b und c der Menge 1 (Einheitsmenge) kann man wie folgt darstellen, wenn s der Anteil Salz und w der Anteil Wasser ist:

$$a = 0,1s + 0,9w$$
$$b = 0,3s + 0,7w$$
$$c = 0,25s + 0,75w$$

Wenn in der 25%igen Lösung c das Mischungsverhältnis aus k Teilen 10%iger und l Teilen 30%iger Salzlösung besteht, kann dies als Gleichung wie folgt ausgedrückt werden:

$$c = k \cdot a + l \cdot b$$
$$0,25s + 0,75w = k \cdot (0,1s + 0,9w) + l \cdot (0,3s + 0,7w)$$
$$0,25s + 0,75w = (0,1k + 0,3l) \cdot s + (0,9k + 0,7l) \cdot w$$

Der Koeffizientenvergleich bedeutet dann:

$$0,25 = 0,1k + 0,3l$$
$$0,75 = 0,9k + 0,7l$$

Dies ergibt nach Multiplizieren der ersten Gleichung mit 9 und anschließendem Abziehen der 2. Gleichung davon: $1,5 = 2l$ bzw. $l = 0,75$. Dies ergibt in der ersten Gleichung eingesetzt: $0,25 = 0,1k + 0,225$ bzw. $k = 0,25$.

Damit ergibt sich das gesuchte Verhältnis $k : l$ wie folgt: $0,25 : 0,75$ bzw. $1 : 3$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070813:

Es kann die Formel der konstanten Geschwindigkeit angewandt werden: $v = s : t$ bzw. umgestellt: $t = s : v$.

Betrachtet man den Zeitpunkt 1, an dem der 1. Läufer (a) ins Ziel kommt, dann gilt für den Zweiten (b) und Dritten (c):

$$t_1 = s_{b_1} : v_{b_1} = s_{c_1} : v_{c_1},$$

wobei $s_{b_1} = 100\text{ m} - 10\text{ m} = 90\text{ m}$ und s_{c_1} die gesuchte Wegstrecke ist, die c zum Zeitpunkt 1 des Zieleinlaufes hinter sich gebracht hatte.

Zum Zeitpunkt 2, an dem der Zweite Läufer (b) das Ziel erreicht gilt analog:

$$t_2 = s_{b_2} : v_{b_2} = s_{c_2} : v_{c_2},$$

wobei $s_{b_2} = 100\text{ m}$ und $s_{c_2} = 100\text{ m} - 10\text{ m} = 90\text{ m}$ sowie $v_b := v_{b_1} = v_{b_2}$ und $v_c := v_{c_1} = v_{c_2}$ gilt.

Nun werden die Gleichungen des 1. und 2. Zeitpunktes zusammengeführt:

$$s_{c_1} = s_{b_1} \cdot \frac{v_c}{v_b} = 90\text{ m} \cdot \frac{v_c}{v_b} = 90\text{ m} \cdot \frac{s_{c_2}}{s_{b_2}} = 90\text{ m} \cdot \frac{90\text{ m}}{100\text{ m}} = 81\text{ m}.$$

Demzufolge war der Dritte noch $100\text{ m} - 81\text{ m} = 19\text{ m}$ vom Ziel entfernt als der Erste das Ziel erreicht hatte.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070814:

I. Analyse

In einem gleichseitigen Dreieck fallen Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunt und Schwerpunkt zusammen, d.h. der Höhenschnittpunkt ist gleichzeitig der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden. Ferner sind im gleichseitigen Dreieck alle Innenwinkel 60° groß.

Wenn man irgendein gleichseitiges Dreieck konstruiert ist dieses zum gesuchten Dreieck ähnlich. Dann kann man auf alle Seiten und den Inkreisradius den Strahlensatz anwenden.

II. Konstruktion

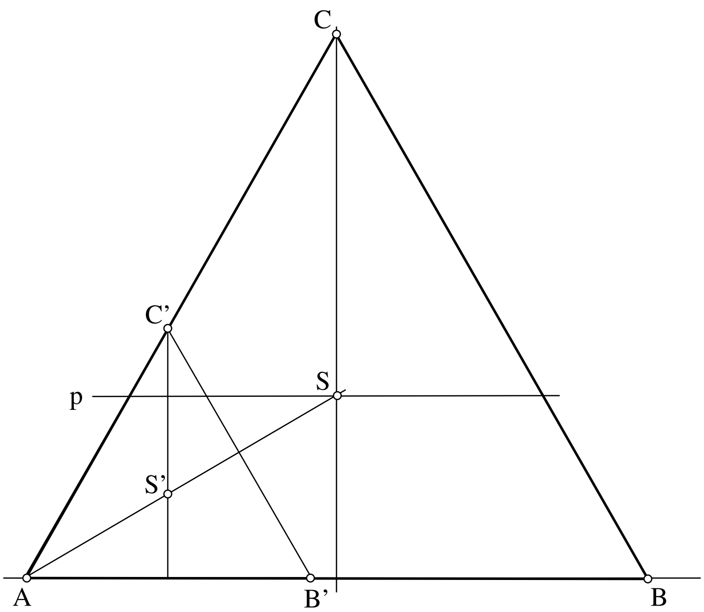
(1) Man konstruiert ein beliebiges gleichseitiges Dreieck $AB'C'$, indem zwei Punkte A und B' festgelegt werden. Um beide Punkte wird ein Kreis mit dem Abstand AB' gezeichnet. Der Schnittpunkt beider Kreise werde C' genannt.

(2) Es wird ein Punkt S' konstruiert aus dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten für die Dreiecksseiten AB' und $B'C'$. Er sei S' genannt

(3) Eine Parallele zu AB' mit Abstand ρ wird in der Halbebene, in der C' liegt, konstruiert. Sie sei p genannt und schneidet die Gerade durch AS' in S.

(4) Die Senkrechte durch S auf der Geraden durch AB' schneidet die Gerade durch AC' im Punkt C.

(5) Zuletzt wird die Gerade durch $B'C'$ durch den Punkt C parallel verschoben und schneidet die Gerade durch AB' in B. Das Dreieck ABC ist das gesuchte gleichseitige Dreieck mit dem Inkreisradius ρ.



III. Beweis

Das gesuchte Dreieck erfüllt die Bedingungen, dass es gleichseitig ist und einen Inkreisradius von ρ besitzt, denn:

Nach Konstruktion ist das Dreieck ΔABC zum Dreieck $\Delta AB'C'$ ähnlich mit dem gleichen Winkel $\sphericalangle BAC$ und nach Strahlensatz, da $B'C' \parallel BC$ und folglich $AC' : AC = AB' : AB = B'C' : BC$ ist. Also ist das Dreieck ΔABC gleichseitig.

Da S' der Punkt im gleichseitigen Dreieck ist, der gleichzeitig Umkreis-, Inkreismittelpunkt und

Schwerpunkt ist, so ist auch S' als Schnittpunkt der Höhe durch C sowie der Winkelhalbierenden von Winkel $\sphericalangle BAC$ derjenige Punkt, der im Dreieck ΔABC Umkreis-, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt ist. Folglich ist der Abstand von S zu AB der Inkreisradius, der nach Konstruktion wiederum die Größe ρ hat.

IV. Existenz und Eindeutigkeit

Die Konstruktionsschritte (1), (2) und (3) sind eindeutig ausführbar. Da AC' nicht senkrecht auf AB' steht, gibt es genau einen Schnittpunkt C, der nach Schritt (4) konstruiert werden kann. Auch der Schritt (5) ist eindeutig durchführbar.

Anmerkung: Die Musterlösung verwendet ebenfalls die Beziehung Schwerpunkt = Inkreismittelpunkt = Umkreismittelpunkt im gleichseitigen Dreieck. Die Konstruktion wird aber wesentlich einfacher dargestellt: Man zeichnet den Kreis mit Radius ρ um einen Punkt S und auf dem Kreis sechs Punkte E, P, F, Q, D, R, die sämtlich zu ihrem Nachbarpunkt den gleichen Abstand ρ haben. Die Senkrechten in D, E, F auf SD, SE, SF erzeugen dann das gesuchte Dreieck.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel