6. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 061241:

In einer Ebene ε seien ein Quadrat $ABCD$ und ein in seinem Innern gelegenen Punkt P gegeben. Ein Punkt Q durchlaufe alle Seiten des Quadrates.

Beschreiben Sie die Menge aller derjenigen Punkte R in ε, für die das Dreieck ΔPQR gleichseitig ist!

Aufgabe 061242:

Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Eine Zahlenfolge werde kurz eine Folge "F_n" genannt, wenn n untereinander verschiedene Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n$ existieren, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedes Glied der Folge ist eine der Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n$.

(2) Jede der Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n$ kommt mindestens einmal in der Folge vor.

(3) Je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder der Folge sind voneinander verschiedene Zahlen.

(4) Keine Teilfolge der Folge hat die Form $\{a, b, a, b\}$ mit $a \neq b$.

Bemerkung: Als Teilfolge einer gegebenen Folge $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ oder $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_s\}$ bezeichnet man jede Folge der Form $\{x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots\}$ oder $\{x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots, x_{m_t}\}$ mit natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$.

Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Gibt es bei fest gegebenen n beliebig lange Folgen F_n?

b) Wenn Frage a) für ein n zu verneinen ist:

Welches ist die größtmögliche Anzahl von Gliedern, die (bei gegebenem n) eine Folge F_n haben kann?

Aufgabe 061243:

Man beweise folgenden Satz:

Ist $n \geqslant 2$ eine natürliche Zahl, sind $a_1, \dots, s_n$ positive reelle Zahlen und wird $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = s$ gesetzt, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}\,.$$

Aufgabe 061244:

Gegeben ist eine natürliche Zahl $n \geqslant 3$. Es sei $V = P_1 P_2 \dots P_n$ ein ebenes regelmäßiges n-Eck.

Geben Sie die Gesamtanzahl aller voneinander verschiedenen stumpfwinkligen Dreiecke $\Delta P_k P_l P_m$ (wobei P_k, P_l, P_M Ecken von V sind) an!

Aufgabe 061245:

Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl n die Anzahl $A(n)$ aller ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung $5x + 2y + z = 10n$!

Aufgabe 061246:

Man beweise folgenden Satz:

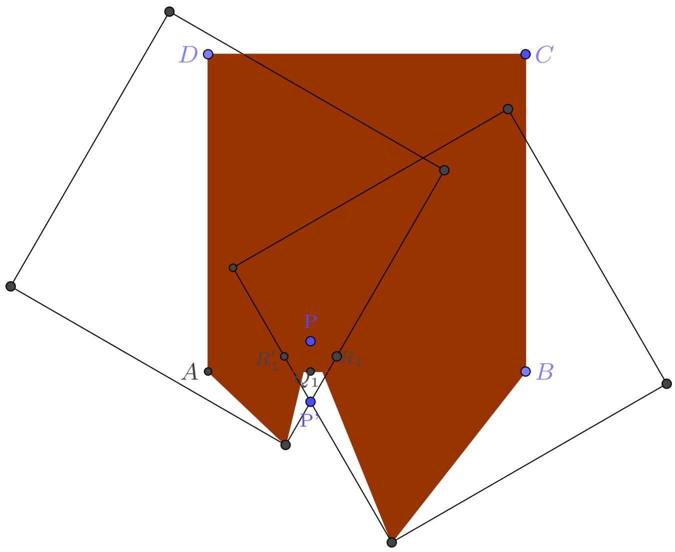
Liegen die n paarweise voneinander verschiedene Punkte P_i, $i = 1, 2, \dots, n,$; $n \geqslant 2$, so im dreidimensionalen Raum, daß jeder von ihnen von ein und demselben Punkt Q einen kleineren Abstand hat als von jedem anderen der P_i, dann ist $n < 15$.

6. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 061341:

Die Menge der Punkte R entspricht den Rändern des Quadrates $ABCD$ nach Drehung um den Punkt P um 60° sowie −60°, was aus der folgenden Zeichnung ersichtlich wird.



Beweis (skizziert):

Da es für die zwei stets nicht-identischen Punkte P, Q in der Ebene immer genau zwei gleichseitige Dreiecke gibt (PQR und PQR'), betrachten wir im Folgenden nur den Punkt R, der sich auf einer bestimmten Seite von PQ befindet (d.h. wir schließen Sprünge von R zu R' aus).

Man begründet leicht, dass sich R genau dann auf einer Geraden bewegt, wenn sich Q auf einer Geraden bewegt, da die Änderung von Winkel und Länge von PQ identisch für PR ist. Außerdem folgt, dass sich R auf einer Strecke bewegt, die aus der Drehung von AB um den Winkel 60° um P hervorgeht, wenn sich Q auf AB bewegt (analog für die anderen vier Seiten).

In den Übergängen zwischen zwei Seiten, wenn Q seine Richtung um 90° ändert, ändert auch R seine Richtung um 90° (mit der gleichen Orientierung). Insgesamt folgt daraus die obige Behauptung.

Aufgeschrieben und gelöst von Kornkreis

Lösung 061342:

a) Nein, denn siehe b)

b) Mit vollständiger Induktion beweisen wir im Folgenden, dass für $n \geq 1$ immer eine Folge F_n der Länge $2n-1$ existiert und diese Länge maximal ist. Für $n=1$ ist dies klar. Sei nun $n>1$ beliebig und die Behauptung für $F_1, ..., F_{n-1}$ bewiesen.

Betrachte die Folge

$$F = z_1, S_1, z_1, S_2, ..., z_1, S_r, z_1$$

wobei S_i ($i \in \{1, ..., r\}, 1 \leq r < n$) die Folgeglieder einer Folge von Zahlen aus $\{z_2, ..., z_n\}$ bezeichne, welche die Bedingungen (3) und (4) der Aufgabenstellung erfüllt.

Wie man leicht sieht, erfüllt die obige Folge F genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn die S_i paarweise disjunkt sind und die Gesamtheit der S_i alle Zahlen außer z_1 beinhaltet.

Es ist klar, dass die Länge von F maximal ist, wenn jedes S_i maximale Länge hat. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann die Länge von F gleich $(r+1) + 2(s_1 + ... + s_r) - r$, wobei s_i die Anzahl der verschiedenen Zahlen in S_i bezeichnet und $r+1$ die Anzahl der z_1 in F ist.

Es ist $s_1 + ... + s_r = n-1$ und folglich ist die Länge von F gleich $2n-1$.

Die Folge F ist optimal: Eine beliebige Folge F_n startet o.B.d.A. mit z_1. Falls danach nicht noch mal z_1 auftritt, können nach z_1 nur noch $2(n-1)-1$ Zahlen folgen (nach Induktionsvoraussetzung), die Länge wäre also nur $1 + 2(n-1) - 1 = 2n-2$.

In einer Folge maximaler Länge kommen also mindestens zwei z_1 vor. Keine der Zahlen z_i, die zwischen zwei nächstgelegenen z_1 stehen, dürfen später noch einmal vorkommen, da man sonst eine Teilfolge $\{z_1, z_i, z_1, z_i\}$ hätte. Diese Bedingungen werden von der Folge F aber allgemein erfüllt, sodass die Länge $2n-1$ optimal ist und die Behauptung bewiesen.

Aufgeschrieben und gelöst von Kornkreis

Lösung 061343:

Beweis:

Zuerst normieren wir via $b_i := \frac{a_i}{s}$ die zu zeigende Ungleichung, denn sie geht durch Kürzen der Brüche mit s äquivalent über in $\sum_{i=1} \frac{b_i}{1-b_i} \geq \frac{n}{n-1}$, wobei die b_i weiterhin positive reelle Zahlen sind, die aber nun zusätzlich $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ erfüllen.

Setzen wir $\lambda_i := b_i$ und $f(x) := \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, so können wir die linke Seite der Ungleichung auch schreiben als $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i)$, wobei natürlich weiterhin alle λ_i positiv sind und ihre Summe 1 ergibt. Da

$$f'(x) = -(1-x)^{-2} \cdot (-1) = (1-x)^{-2} > 0 \qquad \text{und}$$
$$f''(x) = -2(1-x)^{-3} \cdot (-1) = 2(1-x)^{-3} > 0$$

für alle $0 < x < 1$ ist, und da alle b_i aus diesem Intervall $(0;1)$ stammen, können wir die Jensensche-Ungleichung anwenden und erhalten

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

Es ist das quadratische Mittel q der b_i definiert als

$$q := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{n}}$$

und ihr arithmetisches Mittel a als

$$a := \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} = \frac{1}{n}$$

Nach der Ungleichung zwischen quadratischem und arithmetischem Mittel ist $q \geq a = \frac{1}{n}$, also

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}{n} = q^2 \cdot n \geq \frac{1}{n}$$

Da f monoton wachsend ist, folgt damit

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}$$

und insgesamt das zu zeigende. $\square$

Bemerkung: Aufgrund der strengen Monotonie und da die Ungleichung zwischen quadratischem und arithmetischen Mittel nur für Gleichheit aller b_i und damit aller a_i untereinander Gleichheit liefert, wird auch nur dann in der zu zeigenden Ungleichung der Gleichheitsfall angenommen.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 061344:
Wir unterscheiden die Fälle n gerade und n ungerade.

Seien also P_k, P_l und P_m die Eckpunkte des Dreiecks im Uhrzeigersinn. Zunächst stellen wir fest, dass das Dreieck $P_kP_lP_m$ genau dann einen rechten Winkel in P_l hat, wenn P_l auf dem Halbkreis über der Strecke zwischen P_k und P_m liegt (Satz des Thales).

Wir fordern nun, dass der gewünschte stumpfe Winkel in P_l liegt. Dieses ist offensichtlich der Fall, wenn P_l und P_k auf einem Kreisbogen liegen, der weniger als die Hälfte des Umkreises vom regelmäßigen n-Eck einnimmt. Zunächst legen wir also einen beliebigen Punkt P_k fest. Dafür haben wir in beiden Fällen n Möglichkeiten.

1. Fall: Sei n gerade.

   Wir suchen nun die beiden fehlenden Punkte mit obiger Forderung. Zählen wir $\frac{n}{2}$ Punkte von P_k weiter und setzen den Punkt P_m, so hat jedes Dreieck in P_m einen rechten Winkel. Wir können also die fehlenden 2 Punkte für das stumpfe Dreieck aus $\frac{n}{2} - 1$ auswählen.

2. Fall: Sei n ungerade.

   Zeichnen wir den Durchmesser durch P_k, so liegen in diesem Fall genau $\frac{n-1}{2}$ Eckpunkte auf jedem Halbkreis. Davon können wir wieder 2 beliebig auswählen.

Sei $A(n)$ die Gesamtanzahl der stumpfwinkligen Dreiecke, erhalten wir somit:

$$A(n) = \begin{cases} n\binom{\frac{n}{2}-1}{2} & , n \text{ gerade} \\ n\binom{\frac{n-1}{2}}{2} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgeschrieben und gelöst von einem Matheplanetarier

Lösung 061345:
Zu lösen ist

$$5x + 2y + z = 10n \tag{1}$$

Betrachten wir die kleinste natürliche Zahl. Sei also $n = 1$. Dann suchen wir also die nichtnegativen Lösungen für $5x + 2y + z = 10 \iff 2y + z = 10 - 5x$.

Offensichtlich kann x also nur die Werte $0, 1, 2$ annehmen. Für $x = 0$ kann z die Werte $10, 8, 6, ..., 0$ annehmen. Für $x = 1$ kann z die Werte $5, 3, 1$ annehmen und für $x = 2$ kann z nur den Wert 0 annehmen.

Wir erhalten also insgesamt $6 + 3 + 1 = 10$ Lösungen.

Nun setzen wir in (1) mal $x \mapsto x - 2$. Wir erhalten:

$$5(x-2) + 2y + z = 10n \iff 5x + 2y + z = 10(n+1) \tag{2}$$

Sei nun $A(n+1)$ die Anzahl der ganzzahligen nichtnegativen Lösungen von (2). Dann ist $A(n+1) - A(n)$ gleich die Anzahl der ganzzahligen nichtnegativen Lösungen für $x = 0$ und $x = 1$ in (2).

1. Fall: Sei $x = 0$; $2y + z = 10n + 10$

   Es gilt $0 \leq y \leq 5n + 5$ und somit erhalten wir $5n + 6$ Lösungen.

2. Fall: Sei $x = 1$; $5 + 2y + z = 10n + 10 \iff 2y + z = 10n + 5$

   Es gilt $0 \leq y \leq 5n + 2$ und somit erhalten wir $5n + 3$ Lösungen.

Es gilt somit $A(n+1) - A(n) = 10n + 9$ sowie $A(1) = 10$. Rekursiv können wir also $A(n)$ berechnen.

$$(A(n) = 10 + \sum_{k=1}^{n-1}(10k + 9) = 10 + 9(n-1) + 10\frac{(n-1)n}{2} = 5n^2 + 4n + 1$$

Lösung von einem Mitglied des Matheplaneten

2. Lösungsweg:

Offenbar gibt es für jedes $0 \leq x \leq 2n$ und jedes $0 \leq y \leq \frac{10n-5x}{2}$ genau ein $0 \leq z = 10n - 5x - 2y$.

Es ist also die Summe

$$A(n) = \sum_{x=0}^{2n}\left(1 + \left[\frac{10n-5x}{2}\right]\right) = 2n + 1 + \sum_{x=0}^{2n}\left[\frac{10n-5x}{2}\right]$$

zu bestimmen.

Für $x = 2n$ erhalten wir in der zweiten Summe den Wert 0. Alle übrigen Summanden erhält man, indem man für x entweder $2k$ oder $2k+1$ einsetzt, wobei k die natürlichen Zahlen von 0 bis $n-1$ durchläuft. Also ist

$$\begin{aligned}
A(n) &= 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\left[\frac{10n - 5\cdot 2k}{2}\right] + \left[\frac{10n - 5\cdot(2k+1)}{2}\right]\right) \\
&= 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1}(5(n-k) + 5(n-k) - 3) = 2n + 1 - 3n + 10\sum_{k=0}^{n-1}(n-k) \\
&= 1 - n + 10\sum_{\ell=1}^{n}\ell = 1 - n + 10\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = 1 - n + 5n^2 + 5n = 5n^2 + 4n + 1
\end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 061346:

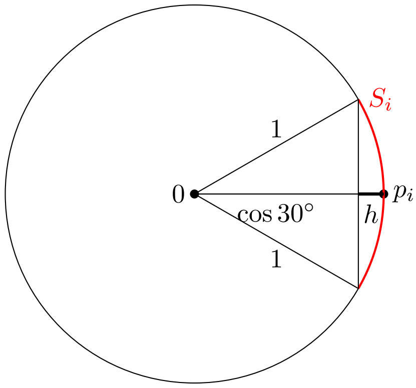
Wir legen alle Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem, wobei o.B.d.A. $Q = 0$ sei.

Nach Annahme ist in jedem der Dreiecke P_iP_jQ die Seite P_iP_j am längsten. Insbesondere schließen also die Vektoren P_i und P_j einen Winkel von mindestens 60° ein.

Daher genügt es zu zeigen: Wenn n paarweise verschiedene Vektoren $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ paarweise miteinander Winkel von jeweils mindestens 60° einschließen, dann gilt $n < 15$.

Da der Winkel zwischen zwei Vektoren nicht von der Länge der Vektoren sondern nur von deren Orientierung abhängt, können wir für den Beweis dieser neuen Behauptung sogar o.B.d.A. annehmen, dass $p_1, p_2, \ldots, p_n$ auf der Einheitskugel liegen.

Es sei für $i = 1, \ldots, n$ die Menge $S_i \subset \mathbb{R}^3$ definiert als die Menge derjenigen Punkte auf der Einheitskugel, deren Ortsvektor mit p_i einen Winkel kleiner als 30° einschließen.



Die S_i sind Kugelsegmente der Höhe $h = 1 - \cos(30°) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ und haben somit eine Mantelfläche von $2\pi h = (2 - \sqrt{3})\pi$.

Aus den Voraussetzungen folgt, dass diese Kugelsegmente paarweise disjunkt sind, also $S_i \cap S_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Da die Oberfläche der Einheitskugel 4π ist muss somit gelten $(2 - \sqrt{3})\pi n \leq 4\pi$, also

$$n \leq \frac{4}{2 - \sqrt{3}} = 4(2 + \sqrt{3}) = 8 + \sqrt{48} < 8 + 7 = 15.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon