6. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 061231:

In ein und derselben Ebene seien n Punkte ($n \geqslant 2$) so verteilt, daß es zu jedem von ihnen unter den übrigen nur einen nächstgelegenen gibt. Zu jedem dieser n Punkte werde der von ihm ausgehende und in dem ihm nächstgelegenen Punkt endende Vektor und nur dieser gezeichnet.

Man ermittle die größtmögliche Anzahl derjenigen unter diesen Vektoren, die dann in einem und demselben der n Punkte enden können.

Aufgabe 061232:

Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels. Eine seiner Seitenflächen sei das Quadrat $ABCD$, der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche sei M.

Wie groß ist der Abstand den Geraden BC und AM?

Anmerkung: Unter dem Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden g und h versteht man die Länge derjenigen Strecke XY, die folgende Eigenschaften hat: X liegt auf g, y liegt auf h, $XY \perp g$, $XY \perp h$.

Aufgabe 061233:

Es sind alle diejenigen reellen Zahlen x in den Intervallen $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ anzugeben, für die $f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$ positiv ist und alle diejenigen reellen Zahlen x, in denselben Intervallen, für die $f(x)$ negativ ist.

Gibt es einen kleinsten positiven Wert, den $f(x)$ in den obigen Intervallen annimmt, und wenn ja, welcher Wert ist dies?

Aufgabe 061234:

Man ermittle alle und nur diejenigen reellen Zahlen x, die der Gleichung $\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$ genügen.

Dabei bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist; z.B. ist $\left[\frac{13}{2}\right] = 6$; $[-6,5] = -7$ und $[6] = 6$.

Aufgabe 061235:

Es seien n Schüler mit Nummern versehen und in der Reihenfolge $1, 2, 3, \ldots, n$ nebeneinander aufgestellt. Ein Umordnungsbefehl besteht darin, daß jeder Schüler entweder einmal seinen Platz mit einem anderen tauscht oder auf seinem Platz bleibt.

Man gebe zwei Befehle an, durch deren Hintereinanderausführung die Anordnung $n, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ entsteht.

Aufgabe 061236:

Die Zahl $\sin 10°$ genügt einer algebraischen Gleichung dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten.

Man stelle diese (bis auf einen gemeinsamen Teiler aller Koeffizienten eindeutig bestimmte) Gleichung auf und ermittle ihre beiden anderen Wurzeln.

6. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 061231:
Die größtmögliche Anzahl ist 5.

Um dies zu zeigen, nehmen wir zuerst an, es gäbe 6 Punkte P_1 bis P_6, deren nächstgelegener Punkt jeweils der von ihnen alle verschiedene Punkt Q sei.

O.B.d.A. seien die Punkte so bezeichnet, dass die von P_i nach Q verlaufenden Vektoren bei einem in mathematisch positiver Orientierung erfolgenden Umlauf um Q in aufsteigender Reihenfolge getroffen werden.

Definieren wir für eine einfachere Notation noch zusätzlich $P_7 := P_1$, dann zerlegen nun also die 6 Winkel $\sphericalangle P_iQP_{i+1}$ den Vollwinkel bei Q. Demzufolge ist mindestens einer unter diesen höchstens $60°$ groß, o.B.d.A. sei dies $\sphericalangle P_1QP_2$. Dann ist einer der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks $\triangle P_1QP_2$ mindestens so groß, sei dies o.B.d.A. $\sphericalangle QP_1P_2$.

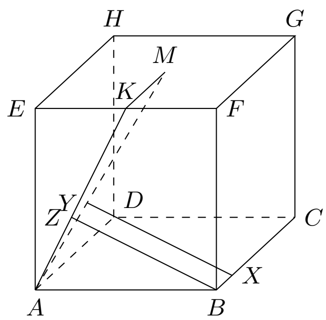
Da aber dem größeren Innenwinkel in einem Dreieck immer auch die größere Seite gegenüberliegt, ist dann auf jeden Fall die Strecke $\overline{P_2Q}$ mindestens so lang wie die Strecke $\overline{P_1P_2}$, also der Punkt P_1 höchstens so weit entfernt von P_2 wie Q.

Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, der eindeutig bestimmte nächstgelegene Punkt zu P_2 wäre Q gewesen. Also können höchstens 5 Vektoren in einem Punkt ankommen.

Dass dies auch wirklich möglich ist, zeigt die Konstellation eines regelmäßigen Fünfecks sowie seines Mittelpunkts. Dann führt die eben durchgeführte Überlegung in jedem Fall dazu, dass die Verbindungsstrecke zweier "benachbarter" Eckpunkte immer länger ist als die jeweiligen Radien. (Und die übrigen Diagonalen sind sowieso noch länger.)

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 061232:



Zunächst bemerkt man, dass AM und BC windschief zueinander sind, weil AM mit ϵ_{ABC} nur den Punkt A gemeinsam hat und folglich die in ϵ_{ABC} gelegene, A nicht enthaltende Gerade BC weder schneidet noch zu ihr parallel ist (Abbildung).
Daher gibt es genau ein Punktepaar (X, Y) mit $X \in BC, Y \in AM$, für das $|XY| = d$ gilt, wenn d den zu berechnenden Abstand von BC und AM bezeichnet. Dabei gilt außerdem

$$XY \perp AM \quad (1) \qquad ; \qquad XY \perp BC \quad (2)$$

Die Ebenen ϵ_{ADM} und ϵ_{BCY} schneiden sich in einer Y enthaltenden Geraden g. Wegen

$$BC \parallel AD \quad (3) \qquad \text{ist} \qquad BC \parallel g \quad (4)$$

Andernfalls hätte nämlich g mit BC einen Schnittpunkt, der auch gemeinsamer Punkt von ϵ_{ABC} und ϵ_{ADM} wäre und damit auf AD läge, was (3) widerspricht.
Aus (2), (3), (4) folgt $g \perp XY$. Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (1) wegen $g \neq AM$: $XY \perp \epsilon_{ADM}$ (5).
Bezeichnet Z den Schnittpunkt der Parallelen zu XY durch B mit ϵ_{ADM}, so ist $BZ \perp \epsilon_{ADM}$ wegen (5), insbesondere also $BZ \perp AZ$ (6) und $|XY| = |BZ|$.
Denn im Fall $X \neq B$ ist $BXYZ$ ein Parallelogramm, während in dem (übrigens nicht eintretenden) Fall $X = B$ außerdem $Y = Z$ wäre.
Wegen $BZ \parallel XY$, (2) ist $BZ \perp BC$. Somit liegt Z in der auf BC senkrechten Ebene ϵ durch B, die eine Seitenfläche des Würfels enthält, deren Rand das Quadrat $ABFE$ ist. Die Ebene ϵ_{ADM} schneidet die Strecke EF in ihrem Mittelpunkt K. Aufgrund der Bedeutung von M und K ist nämlich $MK \parallel AD$, so dass MK in ϵ_{ADM} liegt.
Als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen ist dann $\sphericalangle AKE = \sphericalangle KAB$. Hieraus folgt wegen $Z \in AK$, $AE \perp EK$ und (6) nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle AEK \sim \triangle AZB$ und damit

$$AZ : BZ = KE : AE = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad AZ = \frac{1}{2} BZ \quad (7)$$

Wegen (6) ist $\triangle AZB$ rechtwinklig mit der Hypotenuse AB, so dass aufgrund des Lehrsatzes des Pythagoras und (7)

$$BZ^2 = AB^2 - AZ^2 = a^2 - \frac{1}{4} BZ^2 \qquad \text{also} \qquad BZ = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

gilt. Mithin ist

$$d = XY = BZ = \frac{2}{\sqrt{5}} a = \frac{2}{5} a\sqrt{5}$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 061233:
Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ sind sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$, und damit auch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{und} \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

allesamt positiv, also auch $f(x)$.

Für $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ist zwar weiterhin $\sin x$ positiv, aber $\cos x$ und damit auch $\tan x$ und $\cot x$ negativ. Wegen $0 > \cos x > -1$ ist $\frac{1}{\cos x} < -1$, also $\tan x < -\sin x$ und damit

$$f(x) < \sin x + \cos x - \sin x + \cot x = \cos x + \cot x < 0$$

Positive Werte nimmt f also nur auf dem ersten Intervall an. Dort betrachten wir nun die zwei Funktionen

$$f_1(x) = \sin x + \cos x \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \tan x + \cot x = \tan x + \frac{1}{\tan x}$$

Damit ist wegen $\tan x > 0$ direkt $f_2(x) \geq 2$, wobei Gleichheit nur für $\tan x = 1$, also $x = \frac{\pi}{4}$ als einzigem Wert im betrachteten Intervall, angenommen wird.

Für die Analyse von f_1 betrachten wir deren Ableitungsfunktion $f_1'(x) = \cos x - \sin x$, welche im betrachteten Intervall wieder nur genau für $x = \frac{\pi}{4}$ verschwindet. Da in diesem Intervall die Kosinus-Funktion streng monoton fallend und die Sinus-Funktion streng monoton steigend ist, ist auch f_1' streng monoton fallend und nimmt demnach für Argumente x kleiner als $\frac{\pi}{4}$ positive, und für größere Argumente negative Werte an.

Demzufolge ist die Funktion f_1 im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{4}$ streng monoton wachsend und im Intervall $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ streng monoton fallend. Also ist

$$f_1(x) \geq f_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

wobei Gleichheit nur für $x = \frac{\pi}{4}$ angenommen wird.

Zusammen ergibt sich also

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \geq \sqrt{2} + 2$$

wobei Gleichheit genau für $x = \frac{\pi}{4}$ angenommen wird. Es ist also $2 + \sqrt{2}$ der gesuchte, kleinste positive Wert, den f im betrachteten Intervall annimmt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 061234:

Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x_0 derart, dass

$$\left[\frac{5 + 6x_0}{8}\right] = \frac{15x_0 - 7}{5}$$

gilt. Dann ist

$$\frac{15x_0 - 7}{5} \leq \frac{5 + 6x_0}{8} < \frac{15x_0 - 7}{5} + 1$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit 4:

$$12x_0 - \frac{28}{5} \leq \frac{5}{2} + 3x_0 < 12x_0 - \frac{8}{5} \qquad \text{also} \qquad \frac{41}{10} < 9x_0 \leq \frac{81}{10}$$

und weiter nach Division durch 3 und Subtraktion von $\frac{7}{5}$

$$-\frac{1}{30} < \frac{15x_0 - 7}{5} \leq \frac{13}{10}$$

Da $\frac{15x_0-7}{5}$ ganz ist, folgt weiter, dass entweder $\frac{15x_0-7}{5} = 0$ oder $\frac{15x_0-7}{5} = 1$ gilt. Hieraus ergibt sich $x_0 = \frac{7}{15}$ bzw. $x_0 = \frac{4}{5}$.

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung zeigt man, dass diese beiden Werte Lösungen der Ausgangsgleichung sind. Also hat die Gleichung die beiden Lösungen $x = \frac{7}{15}$ und $x = \frac{4}{5}$ und keine weiteren.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 061235:

Eine mögliche Variante lautet wie folgt:

1. Umordnungsbefehl:

Jeweils zwei Schüler, deren Nummern sich zu $n+1$ ergänzen, tauschen die Plätze. (Ist $n+1$ gerade, so bleibt der Schüler mit Nr. $\frac{n+1}{2}$ an seinem Platz stehen.)

2. Umordnungsbefehl:

Jeweils zwei Schüler, deren Nummern sich zu n ergänzen, tauschen Plätze. (Der Schüler mit Nr. n und, falls existent, der Schüler mit Nr. $\frac{n}{2}$ bleibt/ bleiben stehen.)

Durch den ersten Umordnungsbefehl befindet sich der Schüler mit Nummer k nach dessen Ausführung auf der Position $n+1-k$, da er mit dem Schüler dieser Nummer getauscht hat. (Ist n+1 gerade, so hätte nur der Schüler mit Nummer $k = \frac{n+1}{2}$ keinen Tauschpartner. Aber er soll ja dann auch stehen bleiben und befindet sich genauso an der entsprechenden Position $n+1-k = \frac{n+1}{2} = k$.)

Tauscht nun im zweiten Umordnungsbefehl der Schüler mit Nummer ℓ den Platz mit dem Schüler mit Nummer $n-\ell$, so befand sich jener zweiter nach dem ersten Umordnungsbefehl an Position $n+1-(n-\ell) = \ell+1$.

Der Schüler mit Nummer ℓ ist also durch beide Umordnungsbefehle nun an die Position $\ell+1$, also einen Platz nach rechts gerutscht. Einzige hierbei noch nicht betrachtete Schüler sind diejenigen, die beim zweiten Umordnungsbefehl stehen bleiben.

Das ist einerseits der Schüler mit Nummer n. Dieser steht nach dem ersten Umordnungsbefehl auf Position $n+1-n = 1$, also ganz vorn, und bleibt da auch – wie gewünscht – stehen. Und zweitens, falls n gerade ist, der Schüler mit Nummer $\frac{n}{2}$.

Dieser befand sich nach dem ersten Umordnungsbefehl an Position $n+1-\frac{n}{2} = \frac{n}{2}+1$, war also gegenüber der Ausgangsanordnung schon um einen Platz nach rechts gerückt. Bleibt er beim zweiten Umordnungsbefehl nun stehen, ist er schon an der gewünschten Position.

Damit ist gezeigt, dass nach Ausführung dieser beiden Umordnungsbefehle aus der Start-Anordnung die gewünschte Zielanordnung erreicht wird.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 061236:
Es ist

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{und} \\ \sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) \\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) \\ &= 3(1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \end{aligned}$$

Mit $x = 10°$, $X_1 = \sin(x)$ und $\sin(3x) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$ folgt, dass $X_1 = \sin(10°)$ Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{2} = 3X - 4X^3 \qquad \text{bzw.} \qquad 8X^3 - 6X + 1 = 0$$

ist.
Da $\sin(30°) = \sin(390°) = \sin(750°)$ ist, erfüllen auch $X_2 = \sin(x_2)$ und $X_3 = \sin(x_3)$ mit $x_2 = \frac{390°}{3} = 130°$ und $x_3 = \frac{750°}{3} = 250°$ diese Gleichung.

Offensichtlich sind $X_1 = \sin(10°)$, $X_2 = \sin(130°) = \sin(50°)$ und $X_3 = \sin(250°) = \sin(-70°)$ paarweise verschieden, da die Sinus-Funktion streng monoton steigend im Intervall $[-90°, 90°]$ ist. Also stellen X_2 und X_3 die gesuchten weiteren Lösungen der angegebenen Gleichung dar.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972