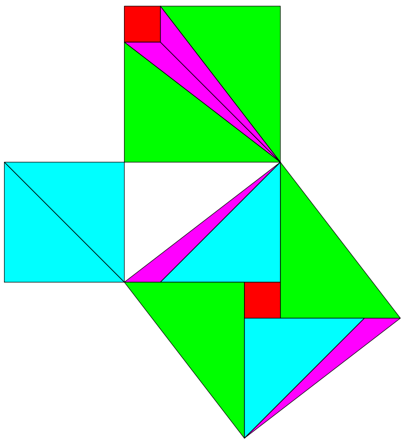
6. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen



6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 061211:

Die Cheops-Pyramide in Ägypten hat die Form einer Pyramide mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Die Spitze S liegt 140 m über dem Mittelpunkt M der Grundfläche. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 231 m. Wir wollen einmal annehmen, daß folgendes möglich ist:

Ein Tourist besteigt die Pyramide derart, daß er von A ausgehend auf geradem Wege senkrecht zur Kante BS gelangt. Nachdem er diese Kante im Punkt B_1 erreicht hat, geht er weiter auf geradem Wege senkrecht zur Kante CS bis zu dieser Kante im Punkt C_1, von dort entsprechend weiter zum Punkt D_1 auf Kante DS und zum Punkt A_1 auf der Kante AS.

a) Wie lang wäre der von ihm von A bis zum Punkt A_1 zurückgelegte Weg?

b) In welcher Höhe über der Grundfläche befände sich der Tourist im Punkt A_1?

c) Welche Winkel würden die geraden Teilwege mit der Ebene der Grundfläche bilden?

Aufgabe 061212:

In einer Ebene sind fünf Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Je zwei dieser Punkte sind entweder durch eine rote oder eine blaue Strecke so verbunden, daß keine drei von diesen Strecken ein Dreieck derselben Farbe bilden.

a) Beweisen Sie:

(1.) Von jedem der fünf gegebenen Punkte gehen genau zwei rote und genau zwei blaue Strecken aus.

(2.) Die roten Strecken bilden einen geschlossenen Streckenzug, der alle fünf gegebenen Punkte enthält. Dasselbe gilt für die blauen Strecken.

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller (voneinander verschiedenen) Möglichkeiten, die gegebenen fünf Punkte unter den Bedingungen der Aufgabe durch rote und blaue Strecken zu verbinden!

Aufgabe 061213:

In einer quaderförmigen Schachtel mit den inneren Abmessungen 10 cm, 10 cm und 1 cm sind gleich große Kugeln von 1 cm Durchmesser einzulegen. Jemand behauptet, man könne mehr als 105 dieser Kugeln in der Schachtel unterbringen.

Stellen Sie fest, ob diese Behauptung richtig ist!

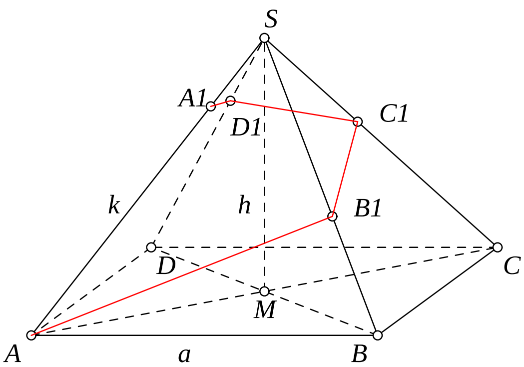
Aufgabe 061214:

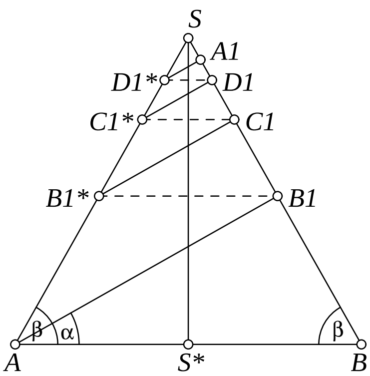
Geben Sie alle n-stelligen natürlichen Zahlen an, die gleich der n-ten Potenz ihrer Quersumme sind!

6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 061211:





a) Aus der Höhe $h := \overline{MS} = 140$ m und der Länge der Grundfläche $a := \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 231$ m kann man leicht die Länge der Kanten $k := \overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$ ausrechnen (die Dreiecke AMS und ABC sind rechtwinklig; dadurch kann jeweils der Satz des Pythagoras verwendet werden):

$$\begin{aligned} k = \overline{AS} &= \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MS}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\right)^2 + h^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) + h^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(a^2 + a^2) + h^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + h^2} = 215,13\text{ m} \qquad (1) \end{aligned}$$

Gesucht ist nun die Weglänge s (wobei $\gamma = \sphericalangle ASB$):

$$\begin{aligned} s &= \overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{D_1A_1} \\ &= \overline{AS}\sin\gamma + \overline{B_1^*S}\sin\gamma + \overline{C_1^*S}\sin\gamma + \overline{D_1^*S}\sin\gamma \\ &= \sin\gamma\cdot(k + \overline{B_1S} + \overline{C_1S} + \overline{D_1S}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\overline{B_1S} &= k\cdot\cos\gamma,\\ \overline{C_1S} &= \overline{B_1S}\cdot\cos\gamma = k\cdot\cos^2\gamma,\\ \overline{D_1S} &= \overline{C_1S}\cdot\cos\gamma = k\cdot\cos^3\gamma.\\ \overline{A_1S} &= \overline{D_1S}\cdot\cos\gamma = k\cdot\cos^4\gamma.\end{aligned}$$

Setzt man dies ineinander ein, erhält man:

$$s = k\cdot\sin\gamma\cdot(1+\cos\gamma+\cos^2\gamma+\cos^3\gamma). \tag{2}$$

Nun stellen wir fest, daß die Dreiecke ABB_1 und AS^*S zueinander ähnlich sind (beide sind rechtwinklig und haben den Winkel β gemeinsam: $\beta = \sphericalangle BAS = \sphericalangle ABS$). Damit läßt sich $sin\alpha$ wie folgt berechnen:

$$\sin\alpha = \overline{AS^*} : \overline{AS} = a : 2k$$

($\Rightarrow \alpha = 32,47°$). Und für $cos\alpha$ ergibt sich mit $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ folgendes:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-a^2 : 4k^2}$$

$\sin\gamma$ läßt sich aus $\overline{AB}$ und $\overline{AS}$ ausrechnen (mit dem Sinussatz): $\sin\gamma : sin\beta = \overline{AB} : \overline{AS} = a : k$, wobei $\sin\beta = \cos\alpha$ gilt, also:

$$\sin\gamma = \frac{a}{k}\cdot\sqrt{1-a^2 : 4k^2} \tag{3}$$

Analog ergibt sich für $\cos\gamma$:

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\frac{a^2}{k^2}\cdot\left(1-\frac{a^2}{4k^2}\right)} = \sqrt{1-\frac{a^2}{k^2}+\frac{a^4}{4k^4}} \tag{4}$$

Setzt man (1), (3) und (4) in (2) ein erhält man das Ergebnis, daß der Tourist 327 m zurücklegen muß. Zur Kontrolle seien die Teilstrecken auch angegeben: $\overline{AB_1} = 195$ m, $\overline{B_1C_1} = 83$ m, $\overline{C_1D_1} = 35$ m, $\overline{D_1A_1} = 15$ m.

b) Für die gesuchte Höhe h_a gilt mit den Bezeichnungen aus dem 1. Bild: $h_a : h = \overline{A_1A} : \overline{AS}$. Daraus folgt nun:

$$h_a = h\cdot\frac{\overline{A_1A}}{k} = \frac{h\cdot(k-\overline{A_1S})}{k} = \frac{h\cdot(k-k\cdot\cos^4\gamma)}{k} = h\cdot(1-\cos^4\gamma) = 135,50\,\text{m}$$

c) Die geraden Teilwege bilden mit der Grundfläche alle denselben Winkel. Dazu wird die Höhe analog zur vorigen Teilaufgabe bzgl. B_1 benötigt:

$$h_b = h\cdot\frac{\overline{B_1B}}{k} = \frac{h\cdot(k-\overline{B_1S})}{k} = \frac{h\cdot(k-k\cdot\cos\gamma)}{k} = h\cdot(1-\cos\gamma) = 80,70\,\text{m}$$

Nun kann der Sinus des gesuchten Winkels wie folgt ausgedrückt werden:

$$\epsilon = \arcsin\left(h_b : \overline{AB_1}\right) = \arcsin\left(\frac{h\cdot(1-\cos\gamma)}{k\cdot\sin\gamma}\right)$$

Man erhält nach Einsetzen: $\epsilon = 65,5°$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 061212:

Da man in der Aufgabenstellung die Worte "rot" und "blau" miteinander vertauschen kann, ohne die Aufgabe zu ändern, genügt es, alle Behauptungen für die roten Strecken zu beweisen.

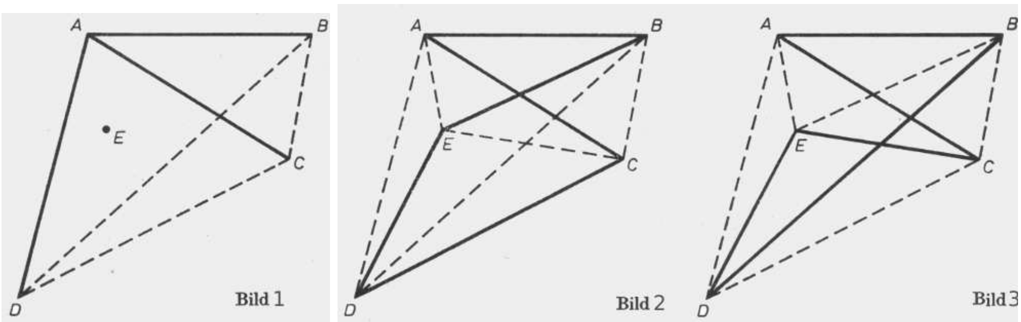
a) 1. Die gegebenen Punkte seien A, B, C, D, E. Nimmt man an, daß von Punkt A drei rote Strecken, z.B. B, AC, AD ausgehen, so müßten die Strecken BC, DB, CD blau sein, da sonst ein "rotes" Dreieck entstehen würde (Bild 1).

   Dann entstünde aber ein "blaues" Dreieck, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht. Also können von jedem Punkt höchstens zwei rote und daher auch höchstens zwei blaue Strecken ausgehen. Da von jedem Punkt genau vier Strecken ausgehen müssen, gehen von jedem Punkt genau zwei rote und genau zwei blaue Strecken aus, falls die Bedingungen überhaupt realisierbar sind.

2. Es seien z.B. die Strecken AB und AC rot, die Strecken AD und AE blau. Dann ist BC blau und DE rot (Bild 2).

   Da vom Punkt D zwei rote STrecken ausgehen, ist DC entweder rot oder blau. Ist DC rot, dann ist CE blau, BE rot, BD blau. In diesem Falle ergeben sich die geschlossenen gleichfarbigen Streckenzüge $ACDEBA$ (rot) und $AECBDA$ (blau), vgl. Bild 2. Ist CD jedoch blau, so erhält man die folgenden gleichfarbigen Streckenzüge $ACEDBA$ (rot) und $ADCBEA$ (blau), vgl. Bild 3.

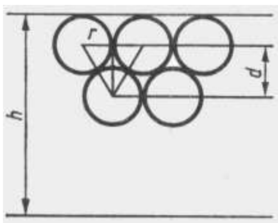
b) Betrachten wir nun o.B.d.A. die vier von A ausgehenden Strecken! Es gibt für sie genau $\binom{4}{2} = 6$ verschiedene Möglichkeiten, genau zwei von ihnen rot zu färben. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es auf Grund der Überlegungen unter a) 2. genau zwei paarweise voneinander verschiedene Verbindungsschemata. Daher gibt es genau 12 verschiedene Realisierungen der Aufgabe.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 061213:

Neben der Möglichkeit, 100 Kugeln zu je 10 in 10 Reihen zu legen, gibt es auch die Möglichkeit, in einer Reihe 10 Kugeln, in der nächsten 9 Kugeln, dann wieder 10 Kugeln u.s.w. unterzubringen. Dabei ist der Abstand d der Geraden durch die Mittelpunkte der ersten von der zweiten Kugelreihe $d = r \cdot \sqrt{3}$, wobei r der Kugelradius ist; denn der Abstand der Geraden durch die Mittelpunkte ist gleich der Länge einer Höhe eines Dreiecks, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte dreier benachbarter Kugeln sind (siehe Bild). Ein derartiges Dreieck ist gleichseitig und hat die Seitenlänge $2r$.



Bezeichnen wir mit n die Anzahl der Kugelreihen, so gilt für den Abstand h der Tangentialebenen bei der oben beschriebenen Anordnung der Kugeln

$$h = 2r + (n-1)r\sqrt{3}.$$

Für $n = 11$ folgt $\left(\text{wegen } r = \frac{1}{2}\right)$ $h < 10$.

Man kann daher 11 Reihen in der Schachtel unterbringen. Die Kugeln lassen sich so anordnen, daß 6 Reihen mit je 10 und 5 Reihen mit je 9 Kugeln besetzt sind, also 105 Kugeln in der Schachtel liegen. Dabei liegen in den 'äußeren' Reihen jeweils 10 Kugeln. Ersetzt man nun eine der Reihen zu 9 Kugeln durch eine mit 10 Kugeln, so vergrößert sich der Abstand

$$h = 2r + r(11-1)\sqrt{3} = 1 + 5 \cdot \sqrt{3}$$

auf

$$h' = 6r + 8r\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} < 3 + 4 \cdot 1,74 = 9,96.$$

Da $h' < 10$ ist, lassen sich 106 Kugeln in der Schachtel unterbringen. Die Behauptung ist also richtig.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 061214:

a) Es ist x^n für $x \geq 10$ und $n \geq 1$ eine mindestens $(n+1)$-stellige Zahl, weil $x^n = 10^n + s$ mindestens $(n+1)$-stellig ist. Daher kommen als Lösung nur solche Zahlen in Frage, deren Quersumme $x < 10$ ist.

b) Ist x^n eine k-stellige Zahl, so ist $x^{n+1} = x^n \cdot x$ wegen $x < 10$ höchstens $(k+1)$-stellig.

c) Im Fall $n = 1$ erhält man für x^n die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

d) Im Fall $n \geq 2$ sei $r \geq 2$ die kleinste natürliche Zahl, für die x^r eine höchstens $(r-1)$-stellige Zahl ergibt. Dann können wir uns auf die Betrachtung der Zahlen x^2, x^3, ..., x^{r-1} beschränken.

   Für x=0, 1, 2, 3 ist $r = 2$, also gibt es für diese Quersummen keine derartigen Zahlen mit $n \geq 2$.

   Da ferner alle Potenzen von 4 auf 4 oder 6, alle Potenzen von 5 auf 5 und alle Potenzen von 6 auf 6 enden und bei $n \geq 2$ außer dieser Endziffer mindestens noch eine von Null verschiedene Ziffer vorkommen muß, kann es auch für x=4, 5 und 6 keine derartigen Zahlen geben.

   Man braucht daher nur zu untersuchen, ob es für x=7, 8 oder 9 solche n-stelligen Zahlen x^n gibt, deren Quersumme gleich x ist.

   Es sei x=7.

   Wegen (immer mod 10): $7^2 \equiv 9$, $7^3 \equiv 3$, $7^4 \equiv 1$, $7^5 \equiv 7$ braucht man nur die Potenzen der Form 7^m mit $m \equiv 3 \pmod 4$ und $m \equiv 0 \pmod 4$ zu untersuchen. Nun ist $7^3 = 343$ (Quersumme $x > 7$), $7^4 = 2401$ (Quersumme $x = 7$), $7^7 = 823543$ (6stellig) und 7^m weniger als m-stellig für $m > 7$. Also ist $7^4 = 2401$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 7.

   Es sei x=8.

   Wegen (immer mod 10): $8^2 \equiv 4$, $8^3 \equiv 2$, $8^4 \equiv 6$, $8^5 \equiv 8$ braucht man nur die Potenzen der Form 8^m mit $m \equiv 2 \pmod 4$, $m \equiv 3 \pmod 4$ und $m \equiv 0 \pmod 4$ zu untersuchen. Wegen

$$n \lg 8 < n \cdot 0,904 < n - 1 \quad \text{für } n \geq 11$$

   ist 8^n für $n \geq 11$ höchsten $(n-1)$-stellig. Daher bleiben noch folgende Fälle zu untersuchen:
   $8^2 = 64$ (Quersumme $x > 8$),

$8^3 = 512$ (Quersumme $x = 8$),
$8^4 = ...096$ (Quersumme $x > 8$),
$8^6 = ...144$ (Quersumme $x > 8$),
$8^7 = ...152$ (Quersumme $x > 8$),
$8^8 = ...216$ (Quersumme $x > 8$),
$8^{10} = ...824$ (Quersumme $x > 8$).
(Es genügt eine Betrachtung der letzten drei Stellen.) Also ist $8^3 = 512$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 8.

Es sei x=9.

Wegen (immer mod 10): $9^2 \equiv 1$, $9^3 \equiv 9$ braucht man nur alle Potenzen der Form 9^{2m} mit m=1,2,3,... zu betrachten. Analoge Überlegungen wie im Falle $x = 8$ ergeben: Wegen

$$n \lg 9 < n \cdot 0,9544 < n - 1 \quad \text{für } n \geq 22$$

ist 9^n eine höchstens $(n-1)$-stellige Zahl. Es bleiben also zu untersuchen übrig: $9^2 = 81$ (Quersumme $x = 9$),
$9^4 = 6561$ (Quersumme $x > 9$),
$9^6 = ...1441$ (Quersumme $x > 9$),
$9^8 = ...6721$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{10} = ...4401$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{12} = ...6481$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{14} = ...4961$ (Quersumme $x > 9$).
$9^{16} = ...1841$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{18} = ...9121$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{20} = ...8801$ (Quersumme $x > 9$).
(Es genügt die Betrachtung der letzten 4 Stellen.) Also ist $9^2 = 81$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 9. Die gesuchten Zahlen sind also für

$n = 1$: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
$n = 2$: 81
$n = 3$: 512
$n = 4$: 2401

Für $n \geq 5$ gibt es keine derartigen Zahlen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag