6. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 061021:
Man ermittle alle reellen Zahlen a, für die eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$$

das Quadrat der anderen Wurzel ist!

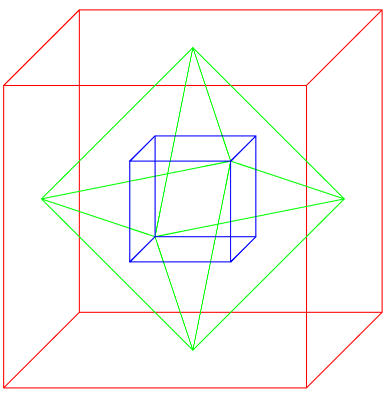
Aufgabe 061022:
Es sei $\frac{p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch (p, q ganzzahlig und $q \neq 0$).

Man beweise, daß dann auch $\dfrac{q-p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch ist!

Aufgabe 061023:
Auf einem (ebenen) Zeichenblatt sind ein Punkt A und zwei nicht parallele Geraden g_1, g_2 gegeben, die nicht durch A gehen und deren Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt.

Konstruieren Sie die Verbindungsgerade durch A und S, so daß die gesamte Konstruktion auf dem Zeichenblatt erfolgt!

Aufgabe 061024:
Verbindet man bei einem Würfel die Mittelpunkte der Seitenflächen gradlinig miteinander, so erhält man die Kanten eines dem Würfel einbeschriebenen Oktaeders. Verführt man in entsprechender Weise bei einem Oktaeder, so erhält man die Kanten eines Würfels.



a) Wie verhalten sich die Volumina von Würfel und einbeschriebenen Oktaeder zueinander?

b) Wie verhalten sich die Volumina von Oktaeder und einbeschriebenen Würfel zueinander?

c) Wie verhalten sich im ersten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?

d) Wie verhalten sich im zweiten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 061021:

Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung seien w und w^2. Dann gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz:

$$w^2 + w = \frac{15}{4} \tag{1}$$

$$w^2 \cdot w = a \tag{2}$$

Aus (1) folgt

$$w_1 = \frac{3}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad w_2 = -\frac{5}{2}$$

Wegen (2) ist

$$a_1 = w_1^3 = \frac{27}{8} \qquad \text{und} \qquad a_2 = w_2^3 = -\frac{125}{8}$$

Durch Einsetzen findet man, dass die ermittelten Werte tatsächlich den Bedingungen genügen:

$$x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{27}{8} = 0$$

hat die Wurzeln $x_1 = \frac{9}{4}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$.

$$x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{125}{8} = 0$$

hat die Wurzeln $x_1 = \frac{25}{4}$ und $x_2 = -\frac{5}{2}$. Die gestellte Bedingung wird von $a_1 = \frac{27}{8}$ und $a_2 = -\frac{125}{8}$ und nur von diesen erfüllt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 061022:

Indirekter Beweis:

Angenommen, $\frac{q-p}{q}$ wäre durch c kürzbar (c ganz, $c \neq 0, \pm 1$), dann müsste gelten $q-p = c \cdot m$ (m ganzzahlig) und $q = c \cdot n$ (n ganzzahlig).

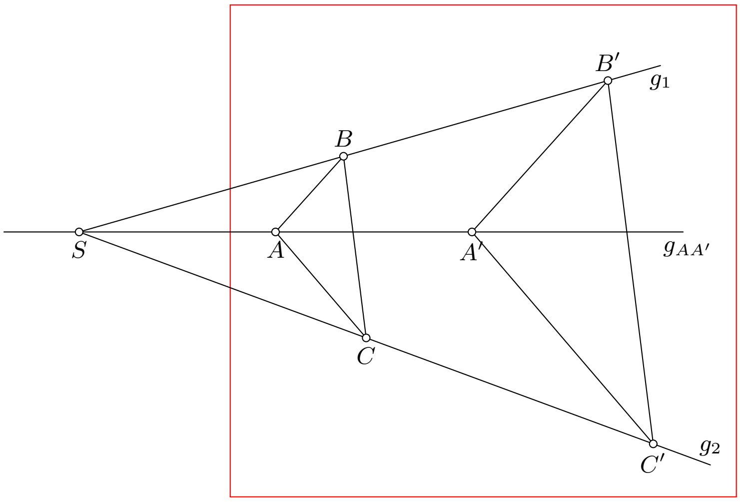
Daraus würde folgen $q = c(n-m)$. Dann wären q und p durch c teilbar, was der Voraussetzung widerspricht.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 061023:
Analyse:

Angenommen, ein Punkt A' ($\neq A$) des Zeichenblattes liege auf AS. Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, dass A, B, C nicht auf derselben Geraden liegen.

Die Parallelen durch A' zu AB bzw. AC schneiden g_1 bzw. g_2 in B' bzw. C'.



Folglich gilt nach dem Strahlensatz $SB : SB' = SA : SA' = SC : SC'$ und nach einer Umkehrung des Strahlensatzes $BC \parallel B'C'$. Daher kann die gesuchte Gerade nur diejenige sein, die sich durch folgendes Konstruktion ergibt:

Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, dass A, B, C nicht auf derselben Geraden liegen und zeichne eine beliebige, von BC verschiedene, Parallele zu BC.

Sie schneide g_1 in B', g_2 in C', Die Parallelen durch B' bzw. C' zu BA bzw. CA schneiden sich dann in einem Punkt A', und $g_{AA'}$ ist die gesuchte Gerade.

Beweis:

Nach Konstruktion ist

$$\begin{aligned} SC : SC' &= BC : B'C' && \text{(Strahlensatz)} \\ &= AC : A'C' && (\text{da } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C') \end{aligned}$$

nach einer Umkehrung des Strahlensatzes geht also $g_{AA'}$ durch S.

Diskussion:

Da BC nicht zu g_2 oder G_1 parallel ist, gilt dasselbe für die gezeichnete Parallele, also sind B', C' eindeutig bestimmt. Da BA, CA nicht parallel sind, gilt dasselbe für ihre Parallelen durch B' bzw. C', also ist auch A' eindeutig bestimmt.

Da schließlich die Parallele zu BC von BC verschieden gezeichnet war, ist $B \neq B'$; $C' \neq C$; also wird auch $A' \neq A$. Somit ist auch der letzte Konstruktionsschritt eindeutig ausführbar.

Endlich kann durch geeignete Wahl von B, C und der Parallelen zu BC stets erreicht werden, dass B, C, B', C', A' auf den Zeichenblatt liegen. Auf einen exakten Beweis hierzu, wird hier verzichtet.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 061024:
Es gelten folgende Beziehungen:

a) $V_w : V_o = 6 : 1$

b) $V_o : V_w = 9 : 2$

c) $O_w : O_o = 2\sqrt{3} : 1$

d) $O_o : O_w = 3\sqrt{3} : 2$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972

(28) alpha, Mathematische Schülerzeitschrift