6. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 061011:

In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Katheten der Länge $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ sind im Inneren um jeden Eckpunkt Kreisbögen mit dem Radius von der Länge $r = \frac{a}{2}$ geschlagen. Die drei Kreissektoren lassen auf der Dreiecksfläche eine Fläche mit dem Inhalt I_K frei.

a) Berechnen Sie I_K!

b) Wieviel Prozent des Flächeninhalts I_D des Dreiecks ΔABC beträgt der Flächeninhalt I_K?

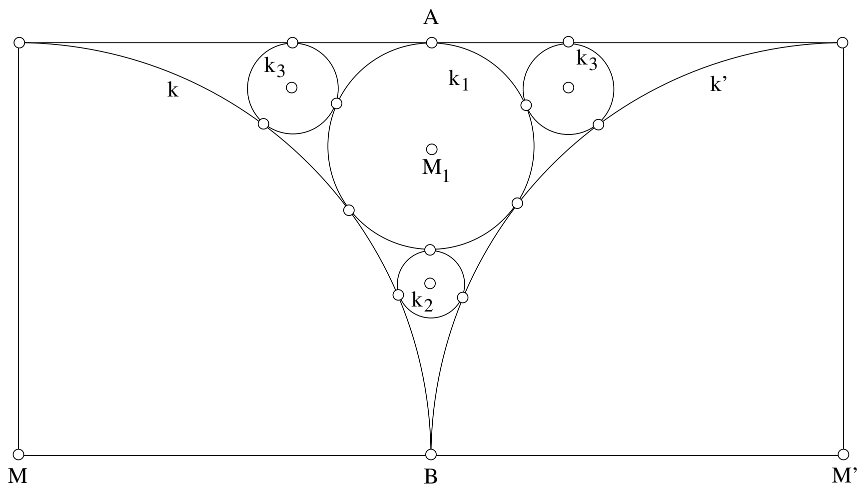
Aufgabe 061012:

Wieviel natürliche Zahlen $n < 1\,000$ gibt es, die weder durch 3 noch durch 5 teilbar sind?

Aufgabe 061013:

In dem in derAbbildung dargestellten Teil eines Ornaments treten als Grundformen Kreise auf. Die Längen der Radien r und r' der Kreise k bzw. k' seien bekannt, und es ist $r = r'$.

Berechnen Sie die Längen r_1, r_2 und r_3 der Radien der Kreise k_1, k_2 und k_3!



Aufgabe 061014:

Am Neujahrstag des Jahres 1953 lernten sich A und B während einer Bahnfahrt kennen. Im Laufe des Gesprächs kam die Rede auf das Alter der beiden.

A sagte: "Wenn Sie die Quersumme meines (vierstellig geschriebenen) Geburtsjahres bilden, so erhalten Sie mein Alter." Nach kurzem Überlegen gratuliert ihm daraufhin B zum Geburtstag.

a) Woher wußte B, ohne weitere Angaben erhalten zu haben, das Geburtsdatum?

b) Wann wurde A geboren?

6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 061011:

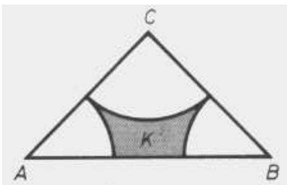
a) Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt

$$I_D = \frac{a^2}{2} \tag{1}$$

Ferner gilt:

$$I_K = I_D - I_{D'}$$

wobei $I_{D'}$ die Summe der Flächeninhalte der drei im Innern des Dreiecks ABC gelegenen Kreissektoren ist. Da nach dem Satz des Pythagoras $|AB| = a\sqrt{2} > a$ gilt, schneiden sich die um A bzw. B jeweils mit dem Radius $\frac{a}{2}$ geschlagenen Kreise nicht (siehe Bild).



Diese drei Kreissektoren lassen sich zu einer Halbkreisscheibe zusammensetzen, da die Winkelgrößen im DReieck 180° beträgt. Daher gilt:

$$I_{D'} = \frac{\pi a^2}{8}$$

$$I_K = I_D - I_{D'} = \frac{a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{8} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{a^2}{2} \sim 0,2146 \cdot \frac{a^2}{2}.$$

b) Wegen (1) beträgt somit der Inhalt I_K rund 21,46% des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 061012:

Bezeichnet man mit $[x]$ die größte ganze Zahl, de nicht größer als x ist, so beträgt die Anzahl der durch 5 teilbaren Zahlen, die kleiner als 1000 sind

$$\left[\frac{999}{5}\right] = 199.$$

Entsprechend ergibt sich für die Anzahl der durch 3 teilbaren Zahlen

$$\left[\frac{999}{3}\right] = 333.$$

Dabei wurden aber die Zahlen, die sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar sind, doppelt gerechnet. Ihre Anzahl ist

$$\left[\frac{999}{15}\right] = 66.$$

Von den 999 Zahlen sind also

$$999 - 333 - 199 + 66 = 533$$

Zahlen weder durch 3 noch durch 5 teilbar.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 061013:
Bezeichnet man die Mittelpunkte der Kreise k, k', k_1, k_2 und k_3 der Reihe nach mit M, M', M_1, M_2 und M_3, den Berührungspunkt der Kreise k und k' mit B und den nicht auf BM_1 gelegenen Schnittpunkt von k_1 mit g_{BM_1} mit A, dann gilt

$$|MM_1| = r + r_1 \quad \text{sowie} \quad AB \perp MB \quad \text{(Bild a)}$$

Außerdem gilt $|AB| = |MB| = r$, und daher $|M_1B| = r-r_1$. Daraus folgt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf ΔMBM_1, $(r+r_1)^2 = (r-r_1)^2 + r^2$, und somit $4rr_1 = r^2$, d.h. wegen $r > 0$: $r_1 = \frac{r}{4}$.

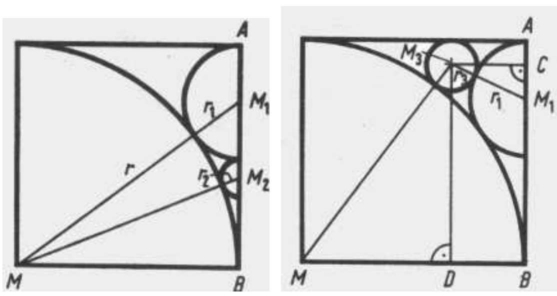
Ferner gilt $|MM_2| = r+r_2$ und $|M_2B| = r\cdot 2r_1 - r_2 = \frac{r}{2} - r_2$,also nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf ΔMBM_2, $(r+r_2)^2 = (\frac{r}{2} - r_2)^2 + r^2$, und somit $3rr_2 = \frac{r^2}{4}$, d.h. wegen $r > 0$: $r_2 = \frac{r}{12}$.

Weiterhin gilt $|M_1M_3| = r_1 + r_3$ und $|M_1C| = r_1 - r_3$, wobei C der Fußpunkt des Lotes von M_3 auf AB ist (Bild b).

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf ΔM_1CM_3, erhält man dann

$$\begin{aligned} |M_3C|^2 &= (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 \\ &= 4r_1r_3 = rr_3, \end{aligned}$$

also $|M_3C| = \sqrt{rr_3}$. Schließlich gilt: $|MM_3| = r + r_3$ und $|M_3D| = r - r_3$, wobei D der Fußpunkt des Lotes von M_3 auf MB ist, sowie $|MD| = r - |M_3C|$, also $|MD| = r - \sqrt{rr_3}$.



Nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf ΔMDM_3, gilt dann

$$\begin{aligned}
(r+r_3)^2 &= (r-r_3)^2 + (r-\sqrt{rr_3})^2 \\
(r+r_3)^2 - (r-r_3)^2 &= (r-\sqrt{rr_3})^2 \\
4rr_3 &= r^2 - 2r\sqrt{rr_3} + rr_3, \\
r - 3r_3 &= 2\sqrt{rr_3}. \quad (\text{wegen } r > 0) \\
r^2 - 6rr_3 + 9r_3^2 &= 4rr_3 \\
r_3^2 - \frac{10rr_3}{9} + \frac{r^2}{9} &= 0,
\end{aligned}$$

woraus sich für die Lösungen r_{3_1} und r_{3_2} die Beziehungen

$$\begin{aligned}
r_{3_1} &= \frac{5r}{9} + \sqrt{(25r^2 + 9r^2)\frac{1}{81}} = \frac{5r}{9} + 4r9 = r \text{ und} \\
r_{3_2} &= \frac{5r}{9} - 4r9 = \frac{r}{9}
\end{aligned}$$

ergeben. Hiernach ist entweder $r_3 = r$ oder $r_3 = \frac{r}{9}$. Wegen $r_3 < r$ folgt $r_3 = \frac{r}{9}$. Zusammenfassend gilt also:

$$r_1 = \frac{r}{4}, \quad r_2 = \frac{r}{12} \quad \text{und} \quad r_3 = \frac{r}{9}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 061014:

A kann höchstens 27 Jahre alt sein; denn die größte Quersumme, die unter den angegebenen Bedingungen möglich ist, beträgt $1 + 8 + 9 + 9 = 27$. Er ist also nach dem Jahre 1924 geboren. Sein Geburtsjahr sei $1900 + 10a + b$ mit a, b ganz und $2 \leq a \leq 5$; $0 \leq b \leq 9$. Sein Alter beträgt am 1.1.1953 folglich (laut Voraussetzung) $1 + 9 + a + b$ Jahre.

Daher gilt, falls er am 1.1. geboren ist (Fall 1):

$$\begin{aligned}
1 + 9 + a + b &= 1953 - (1900 + 10a + b), \\
43 &= 11a + 2b.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird, berücksichtigt man die Bedingungen für a und b, nur von $a = 3$ und $b = 5$ erfüllt. A wurde daher am 1.1.1935 geboren und ist 18 Jahre alt.

Er könnte aber auch an einem anderen Tage geboren sein (Fall 2):

$$\begin{aligned}
1 + 9 + a + b &= 1952 - (1900 + 10a + b), \\
42 &= 11a + 2b.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird unter den Bedingungen der Aufgabe von keinem Zahlenpaar (a, b) erfüllt. Die für den Fall 1 angegebene Lösung ist also die einzige.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag