6. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060921:

Geben Sie vier verschiedene Paare (a, b) positiver, ganzer Zahlen an, so daß die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen jedes Paares 105 beträgt!

(Je zwei Paare (a, b) und (b, a) gelten dabei als nicht verschieden voneinander.)

Aufgabe 060922:

Innerhalb eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius von der Länge r liege der von M verschiedene Punkt P.

Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch P die kürzeste!

Aufgabe 060923:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

> Die Diagonalen des ebenen konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden einander genau dann rechtwinklig, wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ gilt, wobei a, b, c und d die Seitenlängen des Vierecks sind.

Aufgabe 060924:

Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt einer Laienspielgruppe wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanzt.

(1) In keinem Paar soll der männliche Partner kleiner als der weibliche sein.

Außerdem haben einige Teilnehmer noch verschiedene Wünsche:

(2) Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.

(3) Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.

(4) Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.

(5) Kurt, der weiß, daß Eva größer als Anton ist, versucht, eine Einteilung zu finden, die allen Wünschen gerecht wird.

Geben Sie alle Möglichkeiten der Zusammenstellung dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die die genannten Wünsche und Bedingung (1) erfüllen!

Die Aufgabe ist dahingehend zu verstehen, daß sämtliche Zusammenstellungen zu Tanzpaaren angegeben werden sollen, die auf Grund der Angaben nicht als unverträglich mit einer oder mehreren der gestellten Bedingungen (1) bis (5) ausgeschlossen werden müssen.

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 060921:
Durch die Aufgabenstellung ergibt sich folgende Gleichung:

$$105 = a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b) \quad \text{(3. Binomische Formel).}$$

Nun wird substituiert: $x = a + b$ und $y = a - b$. Damit gilt: $a = x - b = y + b$.

Also ergibt sich:

$$b = (x-y)/2 \tag{1}$$
$$a = (x+y)/2 \tag{2}$$

105 hat die Teiler: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Damit gibt es die folgenden möglichen Paare (x, y) mit $x \geq y$, da $a + b \geq a - b$, wenn $a, b \in \mathbb{N}$: (105, 1), (35, 3), (21, 5), (15, 7).

Nun wird wieder rücksubstituiert unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2):

$$\begin{aligned} x = 105, y = 1 &\Rightarrow \underline{a = 53, b = 52} \\ x = 35, y = 3 &\Rightarrow \underline{a = 19, b = 16} \\ x = 21, y = 5 &\Rightarrow \underline{a = 13, b = 8} \\ x = 15, y = 7 &\Rightarrow \underline{a = 11, b = 4} \end{aligned}$$

(von Felix Kaschura)

Variante:

$a^2 - b^2 = 105$ oder $a^2 = 105 + b^2$ bzw. $a = \sqrt{b^2 + 105}$
Wenn man diese Funktion darstellt, kann man schnell die ersten Lösungen ablesen: (11, 4) und (13, 9). Weitere Paare sind (19, 16) und (53, 52). Wegen $11 - 4 = 7; 13 - 8 = 5; 19 - 16 = 3; 53 - 52 = 1$ steht zu vermuten, daß die Reihe nicht fortgesetzt werden kann. Ein Beweis ist nicht nötig - ich habe 4 Paare!

(von Volker Pöschel) Variante:

Und die rechentechnische Lösung mit php-Script:

```
<?php
  $i = 1;
  while ((( $i * $i) + 105 ) > (($i + 1) * ($i + 1)))
  { $i++; }
  for ( $j = 1; $j <= $i; $j++ )
    for( $k = $j + 1; $k <= ($i + 1); $k++ )
```

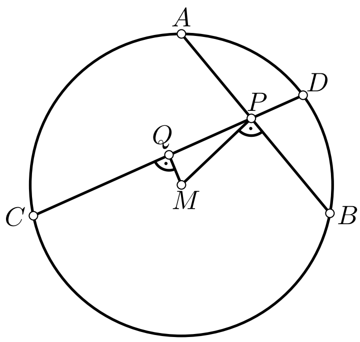
```
    {
      if ( abs( ($j * $j ) - ( $k * $k ) ) == 105 )
        echo "a=$j b=$k<br>";
    }
?>
```

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura

Lösung 060922:

Konstruktion

Man verbindet P mit dem Mittelpunkt M des Kreises und konstruiert die Senkrechte zu MP in P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten A und B. AB ist die gesuchte Sehne.



Beweis

Zum Nachweis, daß AB die kürzeste durch P verlaufende Sehne des Kreises ist, legen wir eine beliebige andere Sehne durch P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten C und D.

Dann ist der Abstand der Sehne CD von M kleiner als $\overline{MP}$.

Enthält CD den Punkt M, dann ist der Abstand der Strecke CD von M gleich Null. Enthält aber CD den Punkt M nicht, dann fällen wir das Lot von M auf CD und nennen seinen Fußpunkt Q.

Im rechtwinkligen Dreieck ΔMQP ist MP die Hypotenuse, und daher gilt $\overline{MQ} < \overline{MP}$.

Nach dem Satz, daß von zwei Sehnen eines Kreises mit unterschiedlichen Abständen vom Mittelpunkt diejenige die kürzere ist, die den größeren Abstand vom Mittelpunkt hat, folgt $\overline{AB} < \overline{CD}$. Da CD (durch P) beliebig angenommen wurde, muß AB die kürzeste durch P verlaufende Sehne dieses Kreises sein. Da es stets genau eine Gerade durch M und P und zu ihr genau eine Senkrechte durch P gibt, ist die Konstruktion stets ausführbar und eindeutig. $\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (28)

Lösung 060923:

Es ist zu beweisen, daß die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ notwendig und hinreichend ist. Also müßte gelten:

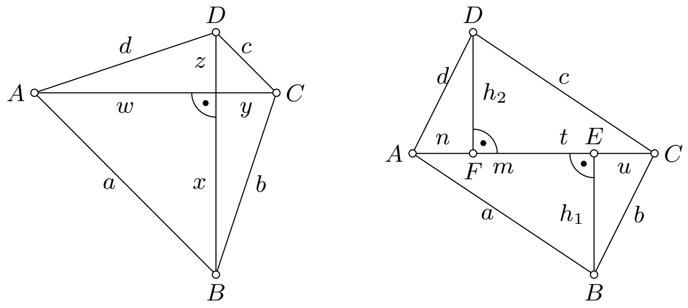
(1) Wenn $AC \perp DB$ ist, so ist $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

In der linken Figur gilt nach dem Satz des Pythagoras: $a^2 = x^2 + w^2$, $b^2 = x^2 + y^2$, $c^2 = z^2 + y^2$, $d^2 = w^2 + z^2$, wobei x, w, z und y die Längen der Diagonalenabschnitte sind.

Daraus folgt:

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + w^2 + z^2 = b^2 + d^2$$

Also gilt (1). Ferner müßte gelten:



(2) Wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ ist, so ist $AC \perp DB$.

Man betrachtet das Viereck $ABCD$, in dem die Diagonale AC eingezeichnet ist. Von den Punkten B und D werden die Lote auf AC gefällt; ihre Fußpunkte seien E und F. Ferner sei $\overline{BE} = h_1$, $\overline{DF} = h_2$, $\overline{AF} = n$, $\overline{FC} = t$, $\overline{AE} = m$, $\overline{EC} = u$ (rechte Figur).

Dann gilt:

$$m + u = n + t. \tag{3}$$

Ferner gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$$a^2 = m^2 + h_1^2, \quad c^2 = t^2 + h_2^2, \quad b^2 = u^2 + h_1^2, \quad d^2 = n^2 + h_2^2,$$

also nach Voraussetzung

$$a^2 + c^2 = h_1^2 + h_2^2 + m^2 + t^2 = h_1^2 + h_2^2 + u^2 + n^2 = b^2 + d^2.$$

Daraus folgt:

$$m^2 + t^2 = u^2 + n^2 \quad \text{bzw.} \quad m^2 - u^2 = n^2 - t^2, \text{ oder } (m+u)\cdot(m-u) = (n+t)\cdot(n-t). \tag{4}$$

Wegen (3) folgt

$$m - u = n - t \tag{5}$$

Aus (3) und (5) erhält man schließlich $m = n$, das heißt, die Punkte E und F sind identisch, D, E $(= F)$ und B liegen auf derselben Geraden DB, die senkrecht zu AC verläuft.

Der behauptete Satz ist also richtig. □

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 060924:
Es gibt genau zwei Möglichkeiten, und zwar die folgenden:

(1) Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Brigitte, Kurt und Eva.

(2) Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Eva, Kurt und Brigitte

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (28)

Quellenverzeichnis

(28) alpha, Mathematische Schülerzeitschrift