# 6. Mathematik Olympiade
# 2. Stufe (Kreisolympiade)
# Klasse 8
# Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

# 6. Mathematik-Olympiade
# 2. Stufe (Kreisolympiade)
# Klasse 8
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060821:

Klaus hat 7 Kugeln: 4 rote, 2 weiße und eine schwarze. Er soll sie in zwei Kästen $A$ und $B$ legen; in $A$ drei, in $B$ vier.

Gib sämtliche möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf die zwei Kästen an! Die Reihenfolge, in der die Kugeln in den Kästen liegen, soll dabei nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 060822:

In der Ebene $\epsilon$ liege das Parallelogramm $ABCD$ und die völlig außerhalb des Parallelogramme verlaufende Gerade $g$.

Beweise, daß die Summe der Entfernungen zweier gegenüberliegender Eckpunkte des Parallelogramms von der Geraden $g$ gleich der Summe der Entfernungen der beiden anderen Eckpunkte von $g$ ist!

Aufgabe 060823:

18% einer Zahl sind gleich 15% einer anderen Zahl.

Ermittle das Verhältnis der ersten zur zweiten dieser beiden Zahlen!

Aufgabe 060824:

Beweise folgenden Satz:

Im Tangentenviereck ist die Summe der Längen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

# 6. Mathematik-Olympiade
## 2. Stufe (Kreisolympiade)
## Klasse 8
## Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 060821:

Es genügt, alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf einen der Kästen (z.B. $A$) zu betrachten, da dadurch die Verteilung der restlichen Kugeln auf den Kasten $B$ eindeutig bestimmt ist. Der Kasten $A$ kann höchstens 1 schwarze, höchstens 2 weiße und höchstens 3 rote Kugeln enthalten.

Alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen gibt daher das folgende Schema an:

| | $A$ | $B$ | |
|---|---|---|---|
| 1. | r r r | r s w w | Dabei bedeuten: |
| 2. | r r s | r r w w | r - rote Kugel |
| 3. | r r w | r r s w | s - schwarze Kugel |
| 4. | r s w | r r r w | w - weiße Kugel |
| 5. | r w w | r r r s | |
| 6. | s w w | r r r r | |

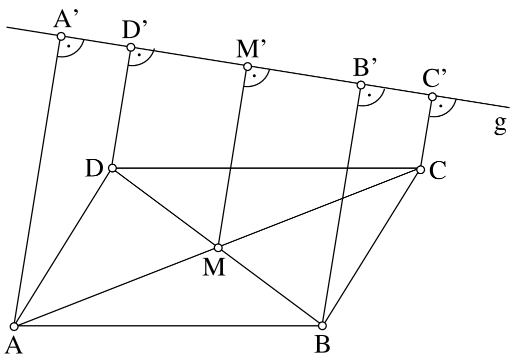
*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)*

Lösung 060822:

Aus den Voraussetzungen folgt, daß die Vierecke $CC'A'A$ und $BB'D'D$ Trapeze sind, die im Falle $g \perp AC$ oder $g \perp BD$ auch entartet sein können. Beide Trapeze haben die Mittellinie $MM'$ gemeinsam. Die Länge dieser Mittellinie $MM'$ ist nach einem bekannten Satz

(1) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken $AA'$ und $CC'$ und nach dem gleichen Satz

(2) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken $BB'$ und $DD'$. Daraus folgt die Behauptung.




*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)*

Lösung 060823:

Gegeben ist folgende Gleichung: $15\%\, x = 18\%\, y$ (1) und gesucht ist das Verhältnis: $x : y$.

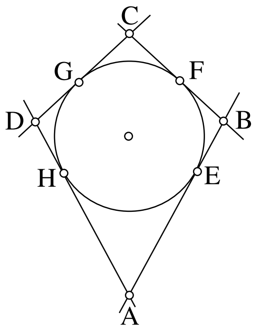
Dividiert man (1) durch y und 18% erhält man $x : y = 15\% : 18\% = 15 : 18 = 5 : 6$. Das gesuchte Verhältnis der beiden Zahlen lautet also $x : y = 5 : 6$

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura*

Lösung 060824:

*Behauptung:* $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

*Beweis:*




Die Berührungspunkte an den Kreis seien $E$, $F$, $G$ und $H$. Weil die beiden Tangentenabschnitte von einem jeden Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis gleichlang sind, gilt:

$$\overline{AE} = \overline{AH} \qquad \overline{BE} = \overline{BF} \qquad \overline{CG} = \overline{CF} \qquad \overline{DG} = \overline{DH}.$$

Daraus folgt:

$$\overline{AE} + \overline{BE} + \overline{CG} + \overline{DG} = \overline{AH} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{DH}, \qquad \text{d.h.}$$
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}.$$

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)*

## Quellenverzeichnis

**(15)** "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.