6. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060621:

Eine Strecke von 20 m wird in drei Teilstrecken geteilt. Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite, und die Länge der dritten Teilstrecke beträgt das Dreifache der Länge der ersten Teilstrecke.

Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Aufgabe 060622:

Gesucht ist die Menge aller natürlichen Zahlen a, die folgenden Bedingungen genügen:

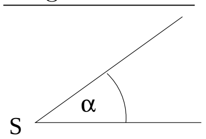
(1) $100 < a < 1\,201$,

(2) a ist sowohl durch 3 als auch durch 4 als auch durch 5 teilbar,

(3) a ist nicht durch 8, nicht durch 9 und nicht durch 25 teilbar,

(4) a läßt bei der Division durch 11 einen Rest, der durch 2 teilbar ist.

Aufgabe 060623:



Gegeben ist ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 36°$ (siehe Abbildung).

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 99 beträgt!

Aufgabe 060624:

Im Rahmen des Wiederaufbaus der Leipziger Innenstadt entstehen moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern werden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt.

Für eine der rechteckigen Terrassen werden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedecken lückenlos den Boden. Jede dieser Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m.

Ermittle die Breite dieser Terrasse!

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 060621:

Wenn man die Länge der zweiten Teilstrecke mit a bezeichnet, ergibt sich für die 1. Teilstrecke $2a$ und folglich für die 3. Teilstrecke $3 \cdot 2a = 6a$. Zusammen sind das $20\,\text{m} = 2a + a + 6a = 9a$. Dies ergibt für $a = \frac{20}{9}$ m.

Damit ist die 1. Teilstrecke $\frac{40}{9}\,\text{m} \approx 4,4\,\text{m}$, die 2. Teilstrecke $\frac{20}{9}\,\text{m} \approx 2,2\,\text{m}$ und die 3. Teilstrecke $\frac{40}{3}\,\text{m} \approx 13,3\,\text{m}$ lang.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 060622:

Aus Aussage (2) ergibt sich, daß die gesuchte Zahl a durch $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ teilbar sein muß (3, 4 und 5 sind paarweise teilerfremd). Folglich muß a ein natürliches Vielfaches von 60 sein.

Der natürliche Faktor k, mit dem 60 multipliziert werden muß, um zu a zu gelangen, darf nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar sein, um Aussage (3) Rechnung zu tragen. Wegen (1) gilt $2 \le k \le 20$.

Für k kommen folglich nur 7, 11, 13, 17, 19 infrage. 11 entfällt, da sonst a nicht (4) genügen kann. Die verbleibenden Fälle werden nun untersucht:

$$\begin{array}{lllllll}
60 \cdot 7 & = & 420 & \Rightarrow & 420:11 & = & 38 \text{ Rest } 2 \\
60 \cdot 13 & = & 780 & \Rightarrow & 780:11 & = & 70 \text{ Rest } 10 \\
60 \cdot 17 & = & 1\,020 & \Rightarrow & 1\,020:11 & = & 92 \text{ Rest } 8 \\
60 \cdot 19 & = & 1\,140 & \Rightarrow & 1\,140:11 & = & 103 \text{ Rest } 7
\end{array}$$

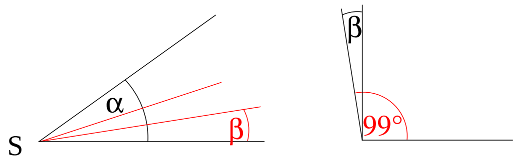
Wie leicht zu sehen, erfüllen 420, 780 und 1020 alle Bedingungen und sind damit (die einzigen) Lösungen.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 060623:

Wenn der gegebene Winkel halbiert wird, hat jeder Teilwinkel eine Größe von 18°. Wird einer dieser beiden neuen Winkel noch ein weiteres Mal halbiert, erhält man einen Winkel $\beta = 9°$. Die Konstruktion einer Winkelhalbierenden gehört zu den Grundkonstruktionen und braucht daher nicht näher erläutert zu werden.

Der gesuchte Winkel beträgt 99° und kann damit als Summe eines rechten Winkels und von β aufgefaßt werden. Es ist also zu einer beliebigen Geraden in einem beliebigen Punkt eine Senkrechte zu errichten (ebenfalls Grundkonstruktion) und der Winkel β anzutragen. Es entsteht der gesuchte Winkel.



Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 060624:
Eine Sandsteinplatte bedeckt mit ihrer rechteckigen Form von $60\,\text{cm} \cdot 40\,\text{cm}$ eine Fläche von $A = 0,6\text{ m} \cdot 0,4\text{ m} = 0,24\text{ m}^2$. Damit bedecken 400 dieser Platten eine Fläche von $A_2 = 400 \cdot 0,24\text{ m}^2 = 96\text{ m}^2$.

Wenn die Platten sich so aneinander legen lassen, daß sie einen 10 m langen Streifen lückenlos bedecken können, so ergibt sich die Breite des Streifens aus der Division des Flächeninhaltes durch die Länge:

$$\begin{aligned} b &= A_2 : 10\text{ m} \\ &= 96\text{ m}^2 : 10\text{ m} \\ &= 9,6\text{ m}. \end{aligned}$$

Da die 10 m Länge durch Aneinanderreihen von 25 Sandsteinplatten entstehen kann, indem bspw. die Platten an der langen Seite aneinander stoßen, kann eine solche Terrasse mit einer Breite von 9, 6 m gebaut werden.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel