5. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 051041:
Es seien m, n, p und q ganze Zahlen mit der Eigenschaft $m - p \neq 0$.

Man zeige, daß in diesem Falle $m - p$ genau dann Teiler von $mq + np$ ist, wenn $m - p$ Teiler von $mn + pq$ ist!

Aufgabe 051042:

a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_a + h_b = 10$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$!

   Dabei ist h_a die Länge der zur Seite $\overline{BC}$ gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite $\overline{AC}$ gehörenden Höhe, α das Maß des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β das Maß des Winkels $\sphericalangle CBA$.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Aufgabe 051043:
Man beweise folgenden Satz:

Die sechs Ebenen, deren jede einen Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen des (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders mit den Ecken A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, halbiert, schneiden einander in genau einem Punkt M. Dieser ist der Mittelpunkt der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel.

Anmerkung: Die Existenz einer einbeschriebenen Kugel soll beim Beweis nicht benutzt werden.

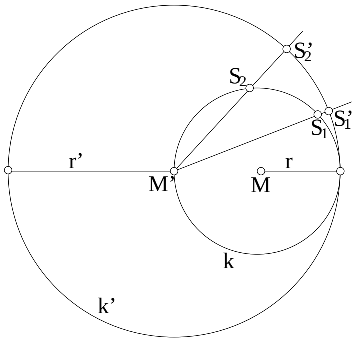
Aufgabe 051044:
Man berechne die Differenz D aus der Summe der Quadrate aller geraden natürlichen Zahlen ≤ 100 und der Summe der Quadrate aller ungeraden natürlichen Zahlen < 100!

Aufgabe 051045:
Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x und y, die die Gleichung

$$[\sin(x - y) + 1] \cdot [2\cos(2x - y) + 1] = 6$$

erfüllen!

Aufgabe 051046:



Der Kreis k rolle auf dem Kreis k', dessen Radius doppelt so groß ist wie der von k, ohne zu gleiten, ab, indem er stets k' von innen berührt.

Man ermittle die Bahnkurve, die ein beliebiger auf k fixiert zu denkender Punkt P bei dieser Bewegung durchläuft!

Anleitung: Man beweise zunächst folgenden Hilfssatz!

Trifft jeder von zwei vom Mittelpunkt M' von k' ausgehende Strahlen k ein zweites Mal, so werden durch diese Schnittpunkte k bzw. k' in zwei solche Bögen zerlegt, daß die im gleichen Winkelraum gelegenen Bögen gleich lang sind.

5. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 051041:
Es ist

$$(mq+np)-(mn+pq) = mq-mn-(pq-pn) = (m-p)(q-n)$$

durch $m-p$ teilbar, woraus direkt das Gewünschte folgt. folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

2. Lösungsweg:

Gilt

$$mn+pq = r(m-p) \qquad r \text{ ganz} \tag{1}$$

so folgt wegen

$$(mn+pq):(m-p) = n + \frac{pq+pn}{m-p} \tag{2}$$

aus (1) und (2)

$$pq+pn = s(m-p) \qquad s \text{ ganz} \tag{3}$$

Andererseits gilt

$$(pq+mn):(-p+m) = -q + \frac{mn+mq}{m-p} \tag{4}$$

und aus (1) und (4) folgt

$$mn+mq = t(m-p) \qquad t \text{ ganz} \tag{5}$$

Also gilt

$$pq+pn+mn+mq = (s+t)(m-q) \tag{6}$$

woraus wegen (1)

$$mq+np = w(m-p) \qquad w \text{ ganz} \tag{7}$$

folgt. Umgekehrt folgt aus (6) wegen

$$(mq+np):(m-q) = q + \frac{pq+np}{m-p} \tag{8}$$

$$pq + np = u(m-p) \qquad u \text{ ganz} \tag{9}$$

sowie wegen

$$(np+mq) : (-p+m) = -n + \frac{mn+mq}{m-p} \tag{10}$$

$$mn + mq = v(m-p) \qquad v \text{ ganz} \tag{11}$$

Also gilt

$$pq + np + mn + mq = (u+v)(m-q) \tag{12}$$

woraus wegen (6)

$$mn + pq = k(m-p) \qquad k \text{ ganz} \tag{13}$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 051042:

1) Gegeben Sei eine beliebige echte Strecke, deren Endpunkte mit A und B' bezeichnet seien.
2) In A trage man den Winkel α und in B' den Winkel β in der entsprechenden Orientierung an die Strecke AB' an. Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel der Winkel heiße C'.
3) Man konstruiere im Dreieck $AB'C'$ die Höhen auf die Seiten $B'C'$ sowie AC', deren Längen mit h'_a bzw. h'_b bezeichnet seien.
4) Auf einem von A ausgehenden Strahl, auf dem keiner der beiden Punkte B' und C' liegt, trage man von A aus die Streckenlänge $h'_a + h'_b$ konstruktiv ab und erhalte den Punkt S'.
5) Auch auf diesem Strahl konstruiere man den Punkt S mit $|AS| = h_a + h_b$.
6) Die Parallele zu $B'S'$ durch S schneide die Gerade AB' in B; die Parallele zu $C'S'$ durch S die Gerade AC' in C.

Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.

Beweis:

Nach Konstruktion ist $\triangle AB'C'$ zum gesuchten Dreieck ähnlich. Also gibt es eine positive reelle Zahl k, sodass das gesuchte Dreieck durch Streckung um den Faktor k und Zentrum A aus dem Dreieck $\triangle AB'C'$ hervorgeht.

Insbesondere ist damit auch das Verhältnis entsprechender Höhen (sowie deren Summen) in den beiden Dreiecken jeweils gleich $k = \frac{h_a+h_b}{h'_a+h'_b} = \frac{|AS|}{|AS'|}$.

Nach den Strahlensätzen gilt dann aber auch $k = \frac{|AB|}{|AB'|}$ sowie $k = \frac{|AC|}{|AC'|}$, sodass im Dreieck $\triangle ABC$ die Höhen (und deren Summe) die richtige Länge besitzen.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 051043:

Für jeden Punkt P auf einer solchen Ebene, die den Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen halbiert, gilt, dass seine Lote auf die beiden Seitenflächen-Ebenen gleich groß sind. Umgekehrt bildet die Menge der Punkte, für die deren Lote auf diese beiden Seitenflächen-Ebenen gleich groß sind, genau jeweils eine solche Winkelhalbierenden-Ebene.

Da jede dieser Ebenen eine Kante des Tetraeders enthält, und keine zwei Tetraederkanten parallel sind, sind auch keine zwei dieser sechs Ebenen zueinander parallel. Es folgt, dass sich je drei von ihnen in genau einem Punkt schneiden.

Sei M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden-Ebenen durch die Geraden A_1A_2, A_1A3 und A_2A4. Auf der ersten dieser Winkelhalbierenden-Ebenen liegen alle Punkte, deren Lote auf die Ebenen $\epsilon_{A_1A_2A_3}$ und $\epsilon_{A_1A_2A_4}$ gleichlang sind; in der zweiten die, für die die Lote auf die Ebenen $\epsilon_{A_1A_2A_3}$ und $\epsilon_{A_1A_3A_4}$ gleichlang sind; und auf der dritten die, für die die Lote auf die Ebenen $\epsilon_{A_1A_2A_4}$ und $\epsilon_{A_2A_3A_4}$ gleichlang sind. Für den Punkt M stimmen also die Längen der Lote auf alle vier Seitenflächen-Ebenen überein. Damit ist aber M in jeder der sechs Winkelhalbierenden-Ebenen enthalten, also ihr gemeinsamer Schnittpunkt.

Da die Lote von M auf die Seitenflächenebenen alle gleichlang sind, berührt eine Kugel um M mit diesem Radius genau alle Seitenflächen (in den jeweiligen Lotfußpunkten).

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 051044:

Es gilt: Summe der ungeraden Quadrate $< 100 = \sum\limits_{i=1}^{50}(2i-1)^2$ und Summe der geraden Quadrate $\leq 100 = \sum\limits_{i=1}^{50}(2i)^2$. Also gilt

$$D = \sum_{i=1}^{50}(2i)^2 - \sum_{i=1}^{50}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{50}4i^2 - \sum_{i=1}^{50}(4i^2-4i+1) = -50 + \sum_{i=1}^{50}4i =$$
$$= -50 + 4\cdot\frac{50}{2}\cdot 51 = 5050$$

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa

Lösung 051045:

Wegen $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ und $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ gilt

$$[\sin(x-y)+1]\cdot[2\cos(2x-y)+1] \leq 6$$

für alle reellen x und y, und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn gleichzeitig

$$\sin(x-y) = 1 \qquad ; \qquad \cos(2x-y) = 1 \tag{1}$$

gilt. Das Gleichungssystem (1) ist daher mit der gegebenen Gleichung äquivalent und genau dann erfüllt, wenn es zwei ganze Zahlen m und n gibt, so dass

$$x - y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \qquad ; \qquad 2x - y = 2n\pi$$

gilt. Daher erhält man alle Lösungen der gegebenen Gleichung, wenn $k = n - m$ und m in der Gleichungen

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2(n-m)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$y = [2(n-2m)-1]\,\pi = [2(k-m)-1]\,\pi$$

unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen durchlaufen.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 051046:

Wir beweisen zuerst den Hilfssatz:

Der Kreis k habe den Radius 1 und damit k' den Radius 2. Mit den Bezeichnungen aus der Skizze in der

Aufgabenstellung hat der Bogen zwischen S_1' und S_2' eine Länge von $2 \cdot \sphericalangle S_1'M'S_2'$, wobei der Winkel im Bogenmaß angegeben sei.

Da M' auf dem Kreis k liegt, ist $\sphericalangle S_1'M'S_2' = \sphericalangle S_1M'S_2$ ein Peripheriewinkel im Kreis k, dessen zugehöriger Zentriwinkel $\sphericalangle S_1MS_2$ nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz genau doppelt so groß ist, also $\sphericalangle S_1MS_2 = 2 \cdot \sphericalangle S_1M'S_2$ beträgt.

Da k den Radius 1 besitzt, hat der Bogen zwischen S_1 und S_2 damit die Länge $2 \cdot \sphericalangle S_1M'S_2$, also die gleiche wie der Bogen zwischen S_1' und S_2' auf k', $\square$.

Wendet man den Hilfssatz auf die Situation an, in der einer der beiden von M' ausgehenden Strahlen M enthält, so schneidet dieser beide Kreise in ihrem Berührungspunkt. Da die von dort ausgehenden Bögen zu den Schnittpunkten des zweiten Strahls gleich lang sind, heißt dies, dass beim weiteren Abrollen von k an k' diese beiden Punkte sich berühren werden.

Da dieser Berührungspunkt auf k' fest ist, findet man bei jeder Lage des Kreises k den darauf fixierten (und sich somit mitbewegenden) Punkt, der später auf den Berührungspunkt abgerollt wird, indem man die Gerade durch den Berührungspunkt und M' mit k schneidet (und den von M' verschiedenen Schnittpunkt betrachtet, sofern es zwei verschiedene gibt).

Damit bewegt sich ein auf k fixierter Punkt P auf einem Durchmesser von k'.

Bemerkung:

Die Argumentation funktioniert auf diese Weise an sich nur dann, wenn sich M höchstens $\frac{\pi}{2}$ "vor" oder "nach" dem Berührungspunkt von P an k' befindet, da nur dann der von M' ausgehende und durch den Berührungspunkt verlaufende Strahl den Kreis k überhaupt noch zumindest tangiert.

Aber da k' den doppelten Radius von k hat, rollt k bei einer vollständigen Umdrehung um k' genau zweimal ab, sodass nach einer halben Runde P ein zweites mal k' berührt; genau am auf k' dem ersten Berührungspunkt diametral gegenüberliegenden Punkt, sodass sich die beiden von M' ausgehenden und durch die Berührungspunkte verlaufenden Strahlen zu einer Gerade ergänzen und die Argumentation nun für beliebige Lagen von M, ohne Einschränkung an Winkel, durchführbar ist.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972