5. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 051011:
Finden Sie eine zweistellige Zahl, die gleich der Summe aus der Zahl an ihrer Zehnerstelle und dem Quadrat der Zahl an der Einerstelle ist!

Weisen Sie nach, daß es nur eine solche Zahl gibt!

Aufgabe 051012:
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 1.

Ermitteln Sie die Menge aller Punkte in der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Quadratseiten oder deren Verlängerungen gleich 4 ist!

Aufgabe 051013:
Wie verhält sich das Maß der Oberfläche eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, zum Maß der Oberfläche eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt, wenn das Maß der Rauminhalte beider Körper gleich ist?

Dabei werden bei beiden Figuren gleiche Maßeinheiten zugrundegelegt.

Aufgabe 051014:
Es seien u, v, c reelle Zahlen mit $|u| < |c|$, $|v| < |c|$.

Es ist zu beweisen, daß dann

$$\left|\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\right| < |c| \text{ gilt.}$$

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 051011:

Angenommen, es gäbe eine solche Zahl $z = 10a + b$ mit natürlichen Zahlen a, b und $0 < a < 10$, $b < 10$, so gilt die Gleichung

$$10a + b = a + b^2.$$

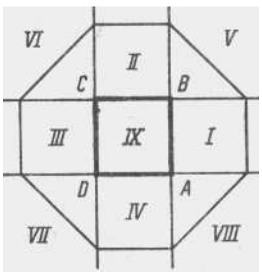
Dann muß $9a = b^2 - b$, also

$$a = \frac{b(b-1)}{9}$$

sein. Da a eine natürliche Zahl ist und b sowie $b - 1$ nicht gleichzeitig durch 3 teilbar sein können, muß entweder b oder $b - 1$ durch 9 teilbar sein. Wegen $b < 10$ und $a \neq 0$ kann $b - 1$ nicht durch 9 teilbar sein, also muß $b = 9$ sein. a ist dann 8. Also kann nur die Zahl 89 die Bedingungen erfüllen. Da $89 = 8 + 9^2$ gilt, genügt 89 wirklich den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 051012:



Die Geraden g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA} zerlegen die Ebene außerhalb des Quadrates in 8 Felder, die im Bild mit I bis VIII bezeichnet sind, wobei die Punkte und Trennungsgeraden als zu allen ihren Feldern anliegenden Feldern zugehörig betrachtet werden.

Wir betrachten zunächst das Feld I. Die Abstände jedes Punktes P dieses Feldes, der die gestellte Bedingung erfüllt, von den Geraden g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA} bezeichnen wir mit e_{AB}, e_{BC}, e_{CD} bzw. e_{DA}. Dann gilt:

$$e_{AB} + e_{BC} + e_{CD} + e_{DA} = 4.$$

Weil P zwischen den parallelen Geraden g_{BC} und g_{DA} liegt, ist $e_{BC} + e_{DA} = 1$. Da die Geraden g_{AB} und g_{CD} parallel sind, und weil g_{CD} und P auf verschiedenen Seiten von g_{AB} liegen, ist $e_{CD} = e_{AB} + 1$. Daher folgt:

$$\begin{aligned} 2e_{AB} + 1 + 1 &= 4 \\ e_{AB} &= 1. \end{aligned}$$

Diese Bedingung wird genau von den Punkten erfüllt, die im Feld I und auf einer Parallelen zu g_{AB} im Abstand 1 liegen. Analog erhält man Parallelen zu den Quadratseiten im Abstand 1 in den Feldern II, III und IV.

Wir betrachten nun das Feld V. Die Abstände jedes Punktes Q dieses Feldes, der die gestellte Bedingung erfüllt, von den Geraden g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA} bezeichnen wir mit f_{AB}, f_{BC}, f_{CD} bzw. f_{DA}. Dann gilt:

$$f_{AB} + f_{BC} + f_{CD} + f_{DA} = 4.$$

Analog zum Fall $P \in I$ ist

$$f_{CD} = f_{AB} + 1 \quad \text{und} \quad f_{DA} = f_{BC} + 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 2f_{AB} + 2f_{BC} + 2 &= 4, \\ f_{AB} + f_{BC} &= 1 \end{aligned}$$

Q liegt daher auf der zu g_{AC} parallelen Diagonalen des aus $ABCD$ durch Spiegelung an D entstehenden Quadrates.

Analog erhält man in den Feldern VI, VII und VIII die Strecken, deren Endpunkte mit den Endpunkten der schon gefundenen Strecken in den Feldern II und III, III und IV bzw. IV und I übereinstimmen.

Im Innern des Quadrats (Feld IX) können keine derartigen Punkte liegen, da der Abstand jedes Punktes im Innern von jeder der Quadratseiten kleiner als die Seitenlänge ist, was dann auch für die entsprechenden Summen gilt.

Die gesuchte Punktmenge besteht also aus den Punkten des Achtecks, dessen Eckpunkte alle auf demselben Kreis um den Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ liegen und von dessen Seiten jede entweder zu einer Seite oder zu einer Diagonalen des Quadrates $ABCD$ parallel und kongruent ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 051013:

Es seien r_1 der Grundkreisradius, I_1 der Oberflächeninhalt und V_1 das Volumen des Kegelkörpers sowie r_2, I_2 und V_2 die entsprechenden Maße des Zylinderkörpers. Die Länge der Mantellinie des Kegels beträgt wegen der Form des Achsenabschnittes $2r_1$.

Die Oberfläche des Kegelkörpers setzt sich aus einer Kreisscheibe vom Radius r_1 und einem Kegelmantel vom Grundkreisradius r_1 und der Mantellinienlänge $s = 2r_1$ zusammen. Daher gilt:

$$I_1 = \frac{\pi}{2}(2r_1)^2 + \pi r_1^2 = 3\pi r_1^2. \tag{1}$$

Als Fläche eines gleichseitigen Dreiecks hat der Achsenabschnitt und damit auch der Kegelkörper die Höhenlänge $2r_1\frac{1}{2}\sqrt{3}$, und somit gilt

$$V_1 = \pi r_1^2 r_1 \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\pi r_1^3}{\sqrt{3}}. \tag{2}$$

Die Oberfläche des Zylinderkörpers setzt sich aus zwei Kreisscheiben vom Radius r_2 und einem Zylindermantel vom Radius r_2 und der Höhenlänge $2r_2$ zusammen. Daher gilt:

$$I_2 = 4\pi r_2^2 + 2\pi r_2^2 = 6\pi r_2^2 \tag{3}$$

und außerdem

$$V_2 = \pi r_2^2 + 2r_2 = 2\pi r_2^3. \tag{4}$$

Wegen $V_1 = V_2$ folgt aus (2) und (4)

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{12}, \tag{5}$$

und somit aus (1), (3) und (5)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}. \tag{6}$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 051014:

Aus $|u| < |c|$ folgt zunächst $c \neq 0$ und weiter $\left|\frac{u}{c}\right| < 1$. Aus $|v| < |c|$ folgt $\left|\frac{v}{c}\right| < 1$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &< \left(1 - \frac{u}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right) = 1 - \frac{u+v}{c} + \frac{uv}{c^2} \quad \text{und} \\ 0 &< \left(1 + \frac{u}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right) = 1 + \frac{u+v}{c} + \frac{uv}{c^2} \end{aligned}$$

und daraus

$$-\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) < \frac{u+v}{c} < 1 + \frac{uv}{c^2}, \tag{1}$$

insbesondere also auch $1 + \frac{uv}{c^2} > 0$, so daß sich nach Division der Ungleichung (1) durch $1 + \frac{uv}{c^2}$ und anschließender Multiplikation mit $|c|$ die Behauptung ergibt.

Bemerkung: Diese Ungleichung kann unter Verwendung der Funktion $\tanh x$ auch folgendermaßen bewiesen werden:

Für alle reellen x gilt $-1 < \tanh x < 1$. Nach dem Additionstheorem für den Tangens hyperbolicus ergibt sich

$$-1 < \tanh(x_1 + x_2) = \frac{tanh x_1 + \tanh x_2}{1 + \tanh x_1 \tanh x_2} < 1,$$

woraus für $x_1 = \operatorname{artanh}\frac{u}{c}$ und $x_2 = \operatorname{artanh}\frac{v}{c}$ die Behauptung folgt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag