05. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 09
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

05. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 09
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050911:

Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines bestimmten Werkstücks eine halbe Stunde. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, überlegt er, ob er eine Vorrichtung bauen soll, die es erlaubt, jedes solche Werkstück in 20 Minuten anzufertigen. Die Herstellung dieser Vorrichtung würde 4 Stunden dauern.

Wie groß müßte die Zahl der herzustellenden Werkstücke mindestens sein, damit der Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis bringen würde?

Aufgabe 050912:

Es ist zu beweisen, daß 77 Telefone nicht so miteinander verbunden werden können, daß jedes mit genau 15 anderen verbunden ist.

Aufgabe 050913:

Vergleichen Sie die beiden Zahlen!

$$A = \frac{5\,678\,901\,234}{6\,789\,012\,345} \quad \text{und} \quad B = \frac{5\,678\,901\,235}{6\,789\,012\,347}$$

Aufgabe 050914:

Beweisen Sie folgenden Satz:

Der Flächeninhalt jedes Dreiecks ist gleich dem Produkt der Seiten dieses Dreiecks dividiert durch den vierfachen Umkreisradius des Dreiecks.

05. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 09
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 050911:

Für den Bau ohne Vorrichtung werden für x Werkstücke 30 min benötigt. Für den Bau mit Vorrichtung 20min plus der 240 min für den Bau der Vorrichtung.

Ab welcher Werkstückanzahl lohnt sich der Bau der Vorrichtung?

$$\begin{aligned} 30x &> 20x + 240 \\ 10x &> 240 \\ x &> 24 \end{aligned}$$

Werden mehr als 24 Werkstücke hergestellt, bringt der vorherige Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis.

Aufgeschrieben und gelöst von Thomas Kugel

Lösung 050912:

Angenommen, diese Verbindung wäre realisierbar. Wir stellen uns vor, daß jede Verbindung durch eine gesonderte Leitung erfolgt. Dann müßten auf jedem Telefon genau 15 Anschlüsse vorhanden sein, insgesamt also $77 \cdot 15$.

Da die Verbindung von Telefon A zu Telefon B stets gleichzeitig Verbindung von Telefon B zu Telefon A ist, müßte die Gesamtzahl der Anschlüsse durch 2 teilbar sein.

Das ist jedoch unmöglich, da $77 \cdot 15$ eine ungerade Zahl ergibt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 050913:

Setzt man den Zähler von A gleich x und den Nenner von A gleich y, so erhält man

$$A = \frac{x}{y} \text{ und } B = \frac{x+1}{y+2}$$

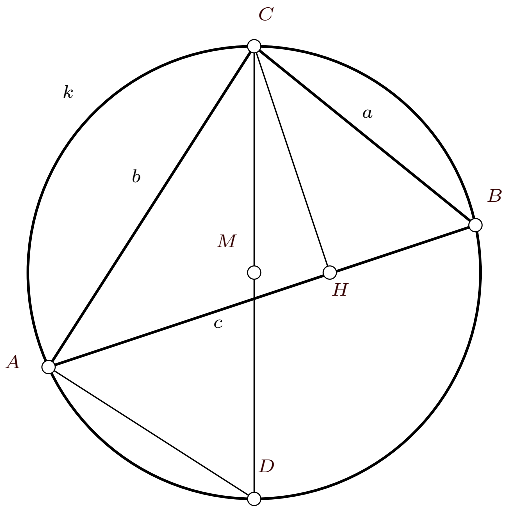
und weiter

$$A - B = \frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} = \frac{xy + 2x - xy - y}{y(y+2)} = \frac{2x - y}{y(y+2)}.$$

Da $2x > y$ ist, folgt $2x - y > 0$ und wegen $y > 0$ weiter $A - B > 0$. Es gilt also $A > B$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 050914:



Man bezeichne die Eckpunkte des Dreiecks so mit A, B und C, daß keiner der Dreieckswinkel größer als der bei C ist, und sodann die Längen der Dreiecksseiten wie üblich mit a, b und c (siehe Bild). Dann ist AC nicht Durchmesser des Umkreises k, weil sonst der Winkel bei B ein rechter und daher größer als der bei C wäre. Ist CD Durchmesser des Umkreises k, so ist $D \notin g_{AC}$.

H sei der Fußpunkt des Lotes von C auf g_{AB}. Dann gilt, wenn r der Umkreisradius ist, $|CD| = 2r$ und für den Flächeninhalt I des Dreiecks ABC, wenn noch $|HC| = h_c$ gesetzt wird

$$I = \frac{ch_c}{2}. \tag{1}$$

Nach Definition von H ist $|\sphericalangle BHC| = 90°$, und nach dem Satz von Thales gilt

$$|\sphericalangle DAC| = 90°. \tag{2}$$

Der Punkt B liegt auf derselben Seite von g_{AC} wie D, denn andernfalls lägen B und D nach dem obigen auf verschiedenen Seiten von g_{AC}. Dann wäre $ABCD$ ein nicht überschlagenes Sehnenviereck und daher nach folgendem Satz:

> ABCD ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Summe der Größen zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180° beträgt, wenn also $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180°$ ist.

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180°. \tag{3}$$

Wegen (2) ist $|\sphericalangle ADC| < 90°$ und folglich wäre wegen (3) $|\sphericalangle ABC| > 90°$ im Widerspruch dazu, daß $\sphericalangle ACB$ größter Winkel im Dreieck ABC ist. Weiter gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle CBA \simeq \sphericalangle CDA$. Also gilt nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\Delta BCH \sim \Delta DCA$. Daraus folgt

$$a : h = 2r : b,$$

d.h.

$$h_c = \frac{ab}{2r}.$$

Setzt man diesen Wert in die Flächeninhaltsformel (1) ein, so erhält man

$$I = \frac{abc}{4r}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag