5. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050811:

Über die Beteiligung an der 1. Stufe der IV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR hatte ein Schüler folgende Übersicht an die Wandzeitung geheftet:

Klasse 8a: Von 33 Schülern beteiligten sich 20, das sind etwa 60,6 Prozent.

Klasse 8b: Von 32 Schülern beteiligten sich 21, das sind etwa 65,6 Prozent.

Klasse 8c: Von 27 Schülern beteiligten sich 19, das sind etwa 70,4 Prozent.

Die Schüler dieser Klassen erhalten die Aufgabe, die prozentuale Gesamtbeteiligung der Schüler der 8. Klassen zu ermitteln. Ein Teil der Schüler bildet das arithmetische Mittel der Prozentzahlen, die anderen bilden den mit 100 multiplizierten Quotienten aus der Anzahl aller Teilnehmer und der Anzahl aller Schüler dieser Klassen.

a) Wie groß ist die Differenz, die sich bei den beiden Rechnungen ergibt?

b) Welche Schüler haben die Prozentzahl in der richtigen Weise berechnet?

Aufgabe 050812:

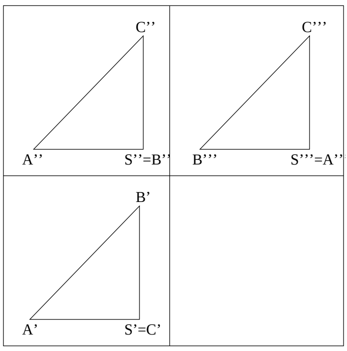
Für welche reellen Zahlen a und b ist die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{ab} \quad \text{erfüllt?}$$

Aufgabe 050813:

a) Gib einen Körper an, der den abgebildeten Grund-, Auf- und Kreuzriß besitzt (s. Abb.)! (Sämtliche Risse sind rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke.)

b) Zeichne ein Netz dieses Körpers, und stelle ein Körpermodell her!



Aufgabe 050814:

Offenbar ist folgender Satz richtig:

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so ist die Summe je zweier seiner Außenwinkel doppelt so groß wie die Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel.

Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 050811:

Die Schüler der zweiten Gruppe haben die Prozentzahl auf Grund der Definition der Prozentzahl in der richtigen Weise berechnet. Sie erhalten bei richtiger Rechnung rund $65,22\%$, während die anderen Schüler $65,53\%$ erhalten. Daher müssen die Schüler dieser Gruppe mit einem unzulässigen Verfahren gerechnet haben. Die Differenz zwischen beiden Ergebnissen beträgt $0,31\%$.

Aufgeschrieben von anonym – Quelle: (15)

Lösung 050812:

Man erkennt zunächst, daß die Gleichung höchstens dann erfüllt sein kann, wenn $a \cdot b \neq 0$ ist. Angenommen, a und b erfüllen diese Gleichung, dann muß gelten

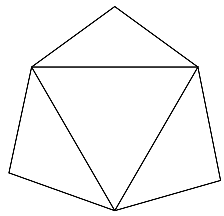
$$\frac{a+b}{ab} = \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{ab}$$

und daher $(a+b)(a-b-1) = 0$.

Hieraus folgt, daß entweder $a+b=0$ oder $a-b=1$ sein muß; denn ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer seiner Faktoren gleich Null ist. Umgekehrt erkennt man leicht, daß im Falle $a \cdot b \neq 0$ die Gleichung sicher erfüllt ist, wenn entweder $a=-b$ oder $a=b+1$ ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 050813:



a) Ein von einem Tetraeder begrenzter Körper, bei dem drei Seitenflächen untereinander kongruente, rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke sind, besitzt einen derartigen Grund-, Auf- und Kreuzriß.

b) Körpernetz (siehe Abbildung)

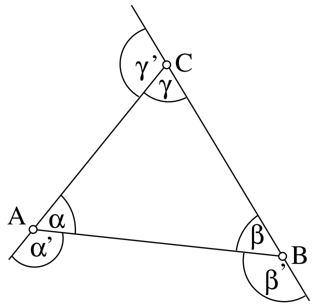
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 050814:

Die formale Umkehrung des gegebenen Satzes lautet: "Ist im Dreieck ABC die Summe je zweier seiner Außenwinkel doppelt so groß wie die Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig."

Diese Umkehrung stellt einen richtigen Lehrsatz dar. Wir beweisen ihn, indem wir folgenden Hilfssatz beweisen: "Ist die Summe zweier Außenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel, so beträgt der dritte Innenwinkel $60°$."

Beweis:



Die beiden Außenwinkel, auf die die Voraussetzung zutrifft, seien ϵ' und δ', die zu ihnen anliegenden Innenwinkel des Dreiecks DEF seien ϵ und δ, der dritte Innenwinkel sei η, der dritte Außenwinkel η' (siehe Abbildung).

Dann gilt (laut Voraussetzung):

$$\epsilon' + \delta' = 2(\epsilon + \delta).$$

Außerdem gilt (als Folgerung aus dem Satz, daß jeder Außenwinkel eines Dreiecke gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel ist):

$$\epsilon' + \delta' + \eta' = 2(\epsilon + \delta + \eta).$$

Aus beiden Gleichungen folgt: $\eta' = 2\eta$. Da aber die Summe zweier Nebenwinkel stets 180° beträgt, folgt weiter: $3\eta = 180°$ und $\eta = 60\eta$.

Wendet man diesen Hilfesatz auf jeden der drei Winkel den Dreiecks ABC an, so ergibt sich die Behauptung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.