4. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 041211:
Aus einer vierstelligen Tafel entnehmen wir die folgenden Näherungswerte:

$$\sqrt[3]{636\,000} \approx 86,00 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{389\,000} \approx 73,00$$

Daher ist $z = \sqrt[3]{636\,000} - \sqrt[3]{389\,000} \approx 13$.

Ohne Benutzung einer weiteren Tafel soll entschieden werden, ob z größer, kleiner oder gleich 13 ist.

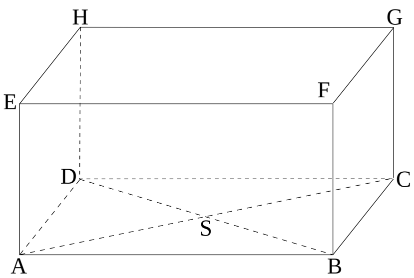
Aufgabe 041212:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks ist

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

wobei a, b, c, d die Längen der Seiten des Sehnenvierecks sind und $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ gesetzt wird.

Aufgabe 041213:



Gegeben sei ein Quader $ABCDEFGH$ mit den Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ von der Länge a und der Kante $\overline{AB}$ von der Länge $a\sqrt{3}$. Der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche $ABCD$ sei S.

a) Es ist der Radius der durch die Punkte A, D, H, E und S gehenden Kugel durch a auszudrücken.

b) Es ist zu beweisen, daß die durch die Punkte S, F und G gehende Ebene die Kugel berührt.

Aufgabe 041214:
Ohne Benutzung einer Zahlentafel oder eines Rechenstabes ist das Produkt

$$x = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$$

zu berechnen.

Aufgabe 041215:

In einer IL 18 der Interflug, die nach Berlin fliegt, sitzen fünf Fluggäste in einer Reihe nebeneinander. Ihre Berufe sind: Journalist, Feinmechaniker, Lehrer, Kapitän und Ingenieur. Sie gehören den folgenden Nationen an: Polen, DDR, Ungarn, Zypern und UdSSR. Sie sind verschieden alt (21, 24, 32, 40 und 52 Jahre). Die Fluggäste treiben verschiedene Sportarten (Handball, Schwimmen, Volleyball, Leichtathletik und Fußball). Ihre Reiseziele sind: Berlin, Leipzig, Dresden, Karl-Marx-Stadt und Rostock.

Aus Gesprächen entnehmen wir folgende Angaben:

(1) Der Ingenieur sitzt ganz links.

(2) Der Volleyballspieler hat den mittleren Platz.

(3) Der Pole ist Journalist.

(4) Der Feinmechaniker ist 21 Jahre alt.

(5) Der Lehrer treibt Schwimmsport.

(6) Der Kapitän reist nach Rostock.

(7) Der Handballspieler stammt aus der DDR.

(8) Der Reisende aus der Sowjetunion fliegt nach Leipzig.

(9) Der nach Berlin fliegende Reisende ist 32 Jahre alt.

(10) Der Leichathlet hat das Reiseziel Karl-Marx-Stadt.

(11) Der Fluggast aus der DDR sitzt neben dem Fluggast aus Ungarn.

(12) Der 52jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Dresden fliegt.

(13) Der 24jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Leipzig fliegt.

(14) Der Ingenieur sitzt neben dem Zyprioten.

a) Wie alt ist der Kapitän?

b) Welche Staatsangehörigkeit besitzt der Fußballspieler?

Weisen Sie nach, daß die Angaben ausreichen, um beide Fragen eindeutig zu beantworten!

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 041211:

Wir behandeln die drei Möglichkeiten $z > 13$, $z = 13$ und $z < 13$, indem wir die Relation $z \gtreqless 13$ umformen, bis wir eine Aussage erhalten, in der direkt erkennbar ist, für welches Relationszeichen sie gilt. Mit der Abkürzung $a = \sqrt[3]{389}$ gilt

$$z \gtreqless 13 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[3]{636000} \gtreqless 13 + 10a$$

$$\Leftrightarrow\; 636000 \gtreqless 13^3 + 3 \cdot 13^2 \cdot 10a + 3 \cdot 13 \cdot 10^2 a^2 + 1000a^3$$

$$\Leftrightarrow\; 0 \gtreqless 3900a^2 + 5070a - 244803 \;\Leftrightarrow\; 0 \gtreqless 3900\left(a^2 + \frac{13}{10}a - \frac{6277}{100}\right)$$

$$\Leftrightarrow\; 0 \gtreqless \left(a - \frac{-13 + \sqrt{25277}}{20}\right) \cdot \left(a - \frac{-13 - \sqrt{25277}}{20}\right)$$

Wegen $a > 0 > (-13 - \sqrt{25277})/20$ ist der zweite Faktor der letzten Zeile positiv, so dass die Relation equivalent ist zu

$$0 \gtreqless a - \frac{-13 + \sqrt{25277}}{20} \;\Leftrightarrow\; -13 + \sqrt{25277} \gtreqless 20a$$

$$\Leftrightarrow\; -13^3 + 3 \cdot 13^2\sqrt{25277} - 3 \cdot 13 \cdot 25277 + 25277\sqrt{25277} \gtreqless 20^3 \cdot 389$$

$$\Leftrightarrow\; -988000 + 25784\sqrt{25277} \gtreqless 3112000 \;\Leftrightarrow\; 25784\sqrt{25277} \gtreqless 4100000$$

$$\Leftrightarrow\; 3223\sqrt{25277} \gtreqless 512500$$

Da beide Seiten positiv sind, können wir quadrieren, und die Relation ist äquivalent zu

$$262570625933 \gtreqless 262656250000$$

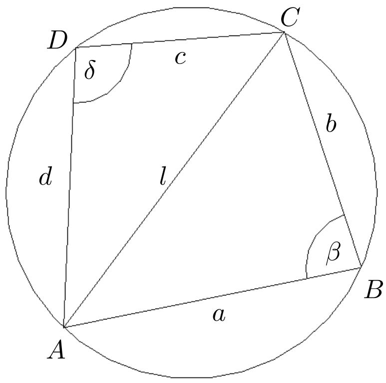
Diese Aussage gilt nur für „<“, also ist $z < 13$.

Bemerkung. Die Aufgabenstellung ist heutzutage sinnlos, denn niemand würde heute Kubikwurzeln in einer vierstelligen Tafel nachschlagen, sondern einen Taschenrechner benutzen, der deutlich genauer und zudem platzsparender ist. Schon mit nur sechs Stellen Genauigkeit ist $\sqrt[3]{636000} - \sqrt[3]{389000} \approx 85.9975 - 72.9989 = 12.9986 < 13$. Interessant sind solche Aufgaben nur, wenn beide Seiten gleich sind (wie z.B. in Aufgabe 041116), denn exakte Gleichheit lässt sich auch durch beliebig genaue Gleitkommarechnung nicht zeigen.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Lösung 041212:

Vorbemerkung: mit „Sehnenviereck“ muss in der Aufgabenstellung „konvexes Sehnenviereck“ gemeint sein, da die Aussage sonst nicht stimmt.



F ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und CDA, die gleich $\frac{1}{2}ab\sin\beta$ bzw. $\frac{1}{2}cd\sin\delta$ sind (Bezeichnungen wie in der Abbildung). Da $ABCD$ ein Sehenviereck ist, gilt $\beta+\delta = 180°$, so dass $\sin\beta = \sin\delta$ und

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\beta + \frac{1}{2}cd\sin\delta = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\beta. \qquad (1)$$

l sei die Länge der Diagonalen AC. Nach dem Kosinussatz für ABC gilt $l^2 = a^2+b^2-2ab\cos\beta$, und nach dem gleichen Satz für CDA gilt $l^2 = c^2+d^2-2cd\cos\delta$. Daraus können wir l^2 eliminieren, und wegen $\beta+\delta = 180°$ gilt $\cos\delta = -\cos\beta$, so dass

$$(ab+cd)\cos\beta = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2). \qquad (2)$$

Indem wir (1) quadrieren, $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ berücksichtigen und (2) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
F^2 &= \frac{1}{4}\Big((ab+cd)^2 - (ab+cd)^2\cos^2\beta\Big)\\
&= \frac{1}{16}\Big(2(ab+cd) - (a^2+b^2-c^2-d^2)\Big)\\
&\qquad \cdot\Big(2(ab+cd) + (a^2+b^2-c^2-d^2)\Big)\\
&= \frac{1}{16}\Big(-a^2+2ab-b^2+c^2+2cd+d^2\Big)\Big(a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2\Big)\\
&= \frac{1}{16}\Big(-(a-b)+(c+d)\Big)\Big((a-b)+(c+d)\Big)\\
&\qquad \cdot\Big((a+b)-(c-d)\Big)\Big((a+b)+(c-d)\Big)\\
&= \frac{-a+b+c+d}{2}\cdot\frac{a-b+c+d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2}\\
&= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).
\end{aligned}$$

Wurzel ziehen und fertig.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Lösung 041213:

Wir führen ein Koordinatensystem mit A als Ursprung, AB als x-, AD als y- und AE als z-Achse ein. Dann ist

$$A = (0,0,0),\ B = (\sqrt{3}a,0,0),\ C = (\sqrt{3}a,a,0),\ D = (0,a,0),$$
$$E = (0,0,a),\ F = (\sqrt{3}a,0,a),\ G = (\sqrt{3}a,a,a),\ H = (0,a,a),$$
$$S = \frac{1}{4}(A+B+C+D) = (\sqrt{3}a/2, a/2, 0).$$

a) Eine Kugel mit Mittelpunkt $M = (m_x, m_y, m_z)$ und Radius $r \geq 0$ hat die Gleichung $(x-m_x)^2+(y-m_y)^2+(z-m_z)^2 = r^2$. Setzt man die Punkte ein, die auf der Kugel liegen sollen, erhält man ein Gleichungssystem für die Unbekannten m_x, m_y, m_z und r. Dass in der Aufgabenstellung mehr Punkte genannt werden, als zur eindeutigen Festlegung der Kugel notwendig sind, ist wohl als deutliche dikatische Aufforderung zu verstehen, statt direkter Lösung des Systems erst festzustellen, dass offensichtlicht $m_y = m_z = a/2$ gelten muss (der Schnittkreis der Kugel mit der Ebene durch A, D, E und H soll diese vier Punkte enthalten). m_x und r berechnen wir daraus, dass A und S auf der Kugel liegen sollen:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (0-m_x)^2 + (0-\frac{1}{2}a)^2 + (0-\frac{1}{2}a)^2 &=& r^2 \\ (\frac{1}{2}\sqrt{3}a - m_x)^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a)^2 + (0-\frac{1}{2}a)^2 &=& r^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} m_x^2 + \frac{1}{2}a^2 &=& r^2 \\ m_x^2 - \sqrt{3}am_x + a^2 &=& r^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} m_x^2 + \frac{1}{2}a^2 &=& r^2 \\ -\sqrt{3}am_x + \frac{1}{2}a^2 &=& 0 \end{array} \right\}$$

(subtrahiere die obere Gleichung von der unteren). Aus der zweiten Gleichung des letzten Paares folgt $m_x = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a$ und somit

$$r = \sqrt{m_x^2 + \frac{1}{2}a^2} = \frac{\sqrt{21}}{6}a.$$

b) Eine Ebene berührt eine Kugel genau dann, wenn der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene gleich dem Kugelradius ist. Ein Normalenvektor der Ebene durch S, F und G ist

$$n := (G-F) \times (S-F) = (0, a, 0) \times (-\sqrt{3}a/2, a/2, -a) = \frac{1}{2}a^2(-2, 0, \sqrt{3}).$$

Da F in der Ebene liegt, ist der Abstand eines Punktes P von der Ebene gleich $\big|(P-F) \cdot n/|n|\big|$. Speziell für den oben berechneten Kugelmittelpunkt $M = (\frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})a$ ist der Abstand

$$\left| \frac{(\frac{1}{6}\sqrt{3} - \sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 1) \cdot (-2, 0, \sqrt{3})\frac{1}{2}a^3}{\frac{\sqrt{7}}{2}a^2} \right| = \left| \frac{\frac{7}{6}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}a^3}{\frac{\sqrt{7}}{2}a^2} \right| = \frac{\sqrt{21}}{6}a = r.$$

Also berührt die Ebene die Kugel.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Lösung 041214:

Mit der Gesetzmäßigkeit $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$ und dem Wissen, daß $\cos 60° = \frac{1}{2}$ sowie $\cos 90° = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} x &= \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\cos 20° + \cos 60°) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \cos 80° \\ &= \frac{1}{4} \cdot \cos 20° \cdot \cos 80° + \tfrac{1}{8} \cdot \cos 80° \\ &= \frac{1}{8} \cdot (\cos 60° + \cos 100° + \cos 80°) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \cos 10° \cdot \cos 90° \right) \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Es ergibt sich für $x = \frac{1}{16}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Peter Hieber

Lösung 041215:
Die Sitzplätze werden, von links beginnend, der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 und 5 numeriert.

Behauptung

(1) Auf Platz 1 sitzt der Ingenieur.

(15) Auf Platz 2 sitzt der Zypriot wegen (1) und (14).

(16) Auf Platz 1 sitzt der Reisende aus der UdSSR, er ist Ingenieur, fliegt nach Leipzig und ist Fußballspieler.

Beweis:
Auf Platz 1 sitzt nicht der Reisende aus Polen wegen (1) und (3), nicht der Reisende aus der DDR und der aus Ungarn wegen (11) und (15) und nicht der Reisende aus Zypern wegen (15). Wegen (8) fliegt er nach Leipzig und ist wegen (10) nicht Leichtathlet, wegen (1) und (5) nicht Schwimmer, wegen (7) nicht Handballspieler und wegen (2) nicht Volleyballspieler. Damit ergibt sich die Antwort auf a): Der Fußballspieler ist Bürger der UdSSR.

Behauptung:

(17) Der Zypriot ist 24 Jahre alt wegen (13), (16) und (14).

(18) Der Kapitän spielt Volleyball oder Handball.

Beweis:
Der Kapitän spielt nicht Fußball wegen (16). Er ist nicht Leichtathlet wegen (6) und (10) und nicht Schwimmer wegen (5).

Behauptung:

(19) Der Kapitän ist Ungar oder Deutscher.

Beweis:
Der Kapitän ist nicht aus der UdSSR wegen (16), nicht aus Polen wegen (3) und nicht aus Zypern wegen (18), (2) und (15) bzw. (18) und (7).

Behauptung:

(20) Der Kapitän sitzt auf Platz 3, 4 oder 5 wegen (1), (15) und (19).

(21) Der Kapitän ist 40 oder 52 Jahre alt.

Beweis:
Er ist nicht 21 Jahre wegen (4), nicht 24 Jahre wegen (17) und (19) und nicht 32 Jahre wegen (6) und (9).

Behauptung:

(22) Der Zypriotauf Platz 2 reist nach Dresden.

Beweis:
Er reist nicht nach Berlin wegen (9) und (17), nicht nach Rostock wegen (19) und (6), nicht nach Leipzig wegen (16) und nicht nach Karl-Marx-Stadt, denn dann wäre er wegen (10) Leichtathlet, daher wegen (18) nicht Kapitän, wegen (5) nicht Lehrer, wegen (16) nicht Ingenieur und wegen (3) nicht Journalist, also Feinmechaniker. Dann wäre er 21 Jahre alt wegen (4) im Widerspruch zu (17).

Behauptung:

(23) Der Kapitän ist 40 Jahre alt.

Beweis:
Angenommen, das wäre nicht der Fall, dann wäre er wegen (21) 52 Jahre alt und säße wegen (12), (22) und (16) auf Platz 3. Er wäre also wegen (2) Volleyballspieler und wegen (7) und (19) Ungar. Dann säße wegen (11) und (15) der Deutsche auf Platz 4, wäre nicht Ingenieur wegen (16), nicht Lehrer wegen (7) und (5), nicht Journalist wegen (3), sondern Feinmechaniker und daher 21 Jahre wegen (4). Daher hätte der Reisende aus der DDR nicht das Reiseziel Berlin wegen (9) und nicht die Reiseziele Leipzig wegen (16), Dresden wegen (22), Rostock wegen (6) und Karl-Marx-Stadt wegen (7) und (10) im Widerspruch zur Voraussetzung, daß eine der fünf Städte sein Reiseziel ist. Damit ergibt sich die Antwort b): Der Kapitän ist 40 Jahre alt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag